NETAJI SUBHAS OPEN UNIVERSITY

Under Graduate Degree Programme
Choice Based Credit System (CBCS)

SELF LEARNING MATERIAL

[Applicable for HCO]

ECONOMICS
[HEC]

GE-EC – 31
Statistics for Business Decisions

উপক্রমণিকা

মহান দেশনায়ক সুভাষচন্দ্র বসুর নামাঙ্কিত এই মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনে আপনাকে স্বাগত। সম্প্রতি এই প্রতিষ্ঠান দেশের সর্বপ্রথম রাজ্য সরকারি মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় হিসেবে ন্যাক (NAAC) মূল্যায়নে 'এ' গ্রেড প্রাপ্ত হয়েছে। বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশন প্রকাশিত নির্দেশনামায় স্নাতক শিক্ষাক্রমকে পাঁচটি পৃথক প্রকরণে বিন্যস্ত করার কথা বলা হয়েছে। এগুলি হল—'কোর কোর্স', 'ডিসিপ্লিন স্পেসিফিক ইলেকটিভ', 'জেনেরিক ইলেকটিভ' এবং 'স্কিল' / 'এবিলিটি এনহ্যান্সমেন্ট কোর্স'। ক্রেডিট পদ্ধতির ওপর ভিত্তি করে বিন্যস্ত এই পাঠক্রম শিক্ষার্থীর কাছে নির্বাচনত্মক পাঠক্রমে পাঠ গ্রহণের সুবিধে এনে দেবে। এরই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে যান্মাষিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা এবং ক্রেডিট ট্রান্সফারের সুযোগ। শিক্ষার্থী কেন্দ্রিক এই ব্যবস্থা মূলত গ্রেড-ভিত্তিক যা অবিচ্ছিন্ন আভ্যন্তরীণ মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সার্বিক মূল্যায়নের দিকে এগোবে এবং শিক্ষার্থীকে বিষয় নির্বাচনের ক্ষেত্রে যথোপযুক্ত সুবিধা দেবে। শিক্ষাক্রমের প্রসারিত পরিসরে বিবিধ বিষয় চয়নের সক্ষমতা শিক্ষার্থীকে দেশের অন্যান্য উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আন্তঃব্যবস্থায় অর্জিত ক্রেডিট স্থানান্তরে সাহায্য করবে। শিক্ষার্থীর অভিযোজন ও পরিগ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠক্রমের বিন্যাসই এই নতুন শিক্ষাক্রমের লক্ষ্য।

UGC (Open and Distance Learning Programmes and Online Programmes) Regulations, 2020 অনুযায়ী সকল উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের স্নাতক পাঠক্রমে এই সি.বি.সি.এস. পাঠক্রম পদ্ধতি কার্যকরী করা বাধ্যতামূলক—উচ্চশিক্ষার পরিসরে এই পদ্ধতি এক বৈকল্পিক পরিবর্তনের সূচনা করেছে। আগামী ২০২১-২২ শিক্ষাবর্ষ থেকে স্নাতক স্তরে এই নির্বাচনভিত্তিক পাঠক্রম কার্যকরী করা হবে, এই মর্মে নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে। বর্তমান পাঠক্রমগুলি উচ্চশিক্ষা ক্ষেত্রের নির্ণায়ক কৃত্যকের যথাবিহিত প্রস্তাবনা ও নির্দেশাবলী অনুসারে রচিত ও বিন্যস্ত হয়েছে। বিশেষ গুরুত্বারোপ করা হয়েছে সেইসব দিকগুলির প্রতি যা ইউ.জি.সি কর্তৃক চিহ্নিত ও নির্দেশিত।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ক্ষেত্রে স্ব-শিক্ষা পাঠ-উপকরণ শিক্ষার্থী সহায়ক পরিষেবার একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। সি.বি.সি.এস পাঠক্রমের এই পাঠ-উপকরণ মূলত বাংলা ও ইংরেজিতে লিখিত হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধের কথা মাথায় রেখে আমরা ইংরেজি পাঠ-উপকরণের বাংলা অনুবাদের কাজেও এগিয়েছি। বিশ্ববিদ্যালয়ের আভ্যন্তরীণ শিক্ষকরাই মূলত পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির ক্ষেত্রে অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছেন—যদিও পূর্বের মতই অন্যান্য বিদ্যায়তনিক প্রতিষ্ঠানের সঙ্গে সংযুক্ত অভিজ্ঞ বিশেষজ্ঞ শিক্ষকদের সাহায্য আমরা অকুণ্ঠচিত্তে গ্রহণ করেছি। তাঁদের এই সাহায্য পাঠ-উপকরণের মানোন্নয়নে সহায়ক হবে বলেই আমার বিশ্বাস। নির্ভরযোগ্য ও মূল্যবান বিদ্যায়তনিক সাহায্যের জন্য আমি তাঁদের আন্তরিক অভিনন্দন জানাই। এই পাঠ-উপকরণ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষণ পদ্ধতি-প্রকরণে নিঃসন্দেহে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নেবে। একথা বলা বাহুল্য যে, এ বিষয়ে উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনের পঠন প্রক্রিয়ায় সংযুক্ত সকল শিক্ষকের সদর্থক ও গঠনমূলক মতামত আমাদের আরও সমৃদ্ধ করবে।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির এই বিদ্যায়তনিক উদ্যোগের সর্বাঙ্গীণ সাফল্য কামনা করি। মুক্তশিক্ষাক্রমে উৎকর্ষের প্রশ্নে আমরা প্রতিশ্রুতিবদ্ধ।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার

উপাচার্য

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

Netaji Subhas Open University

Under Graduate Degree Programme

Choice Based Credit System (CBCS)

(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা)

বিষয় : সাম্মানিক বাণিজ্য (Commerce)

Subject : B.Com (Hons.) / HCO

Course : Statistics for Business Decission

Course Code : GE-EC-31

[Applicable for HCO Students]

প্রথম মুদ্রণ : আগস্ট, 2022

First Print : August, 2022

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations of the Distance Education Bureau of the University Grants Commission.

পরিচিতি

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

Under Graduate Degree Programme
Choice Based Credit System (CBCS)
(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যমান ব্যবস্থা)
বিষয় : সাম্মানিক বাণিজ্য
Subject : Honours in Commerce (HCO)
Course : Statistics for Business Decisions
Course Code : GE-EC-31

: বিষয় সমিতি :

সদস্যবৃন্দ

ড. অনির্বাণ ঘোষ
Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University (Chairperson)

ড. উত্তম কুমার দত্ত
Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University

ড. সজল কুমার মাইতি
Professor of Commerce (PG Dept.)
Hooghly Mohsin College

ড. আশিষ কুমার সানা
Professor of Commerce
University of Calcutta

ড. চিত্ত রঞ্জন সরকার
Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University

শ্রী তপন কুমার চৌধুরী
Associate Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University

সি.এ. শুভায়ন বসু
Assistant Professor of Commerce
Ananda Mohan College

শ্রী সুদর্শন রায়
Assistant Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University

: রচনা :
গোবিন্দলাল মণ্ডল
Associate Professor of Mathematics
New Alipore College

: সম্পাদনা :
ড. প্রেমানন্দ জানা
Ex - Professor
MCKV Institute of Engineering

: বিন্যাস সম্পাদনা :
শ্রী সুদর্শন রায়
Assistant Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University

নেতাজি সুভাষ
মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

UG : Commerce
(HCO)

Course : Statistics for Business Decision
Code : GE-EC-31

একক 1 ❑ রাশিতথ্যের অর্থ ও গুরুত্ব (Statistics : Meaning & Importance)

গঠন

1.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়বার পর আপনি জানতে পারবেন

- পরিসংখ্যান কাকে বলে
- রাশিতথ্যের প্রকারভেদ
- রাশিবিজ্ঞানের গুরুত্ব ও সুযোগ
- রাশিবিজ্ঞানের সীমাবদ্ধতা

1.1 পরিসংখ্যান শব্দের অর্থ

ইংরেজী statistics শব্দটি খুব সম্ভবত ল্যাটিন শব্দ ‘status’ অথবা ইতালীয় শব্দ ‘statista’ অথবা জার্মান শব্দ ‘statistek’ থেকে উৎপন্ন হয়েছে, যা রাষ্ট্রের বা রাষ্ট্রের জনগণের শাসনকার্যের বা রাজনৈতিক উদ্দেশ্য আহরিত তথ্যের সংকলনকে বোঝাত। বর্তমানকালে, statistics বা পরিসংখ্যান কৃষিবিজ্ঞান, অর্থনীতি, মনোবিজ্ঞান, সমাজ বিদ্যা, ব্যবসা-বাণিজ্য প্রভৃতি ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়।

পরিসংখ্যান শব্দটির দু'টি ভিন্ন অর্থ আছে। বহুবাচনিক অর্থে (Plural sense), পরিসংখ্যান বলতে বিশেষ পদ্ধতিতে সংকলিত কোনও বিশেষ বিষয়ের রাশিমালা বোঝায়। একবাচনিক অর্থে (Singular sense) পরিসংখ্যান হল বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব ও প্রয়োগবিধি সমূহ (Scientific Theories and Methods), যা কোনও বিশেষ বিষয়ের রাশিমালার শ্রেণীবিন্যাস, উপস্থাপন, বিশ্লেষণ ও সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য ব্যবহৃত হয়। পরিসংখ্যানের বিশ্লেষণ নিয়ে গড়ে ওঠা এই বিজ্ঞানকে রাশিবিজ্ঞান বা সংখ্যাতত্ত্ব বলা হয়।

1.2 রাশিতথ্য ও উহার প্রকারভেদ

একজন রাশিবিজ্ঞানীর প্রথম কাজ হচ্ছে রাশিতথ্য বা সংখ্যাতথ্য (Data) সংগ্রহ ও একত্রীকরণ করা। সে নিজের অনুসন্ধানক্ষেত্রে গিয়ে তা সংগ্রহ করতে পারে অথবা অন্য কোনও উৎস থেকে সংগৃহীত তথ্য নিজের কাজে ব্যবহার করতে পারে। অনুসন্ধানক্ষেত্রে নিজের সংগৃহীত তথ্যকে প্রাথমিক বা প্রত্যক্ষ রাশিতথ্য (Primary Data) বলে। বাস্তবিক ক্ষেত্রে, এই প্রাথমিক তথ্যই পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। অনুসন্ধানকার্যে অন্য কোনও উৎস থেকে সংগৃহীত তথ্য ব্যবহৃত হলে ঐ তথ্যকে অপ্রাথমিক বা পরোক্ষ রাশিতথ্য (Secondary Data) বলে।

প্রাথমিক রাশিতথ্য কোনও বিশেষ উদ্দেশ্য সরাসরি অনুসন্ধানক্ষেত্রে থেকে সংগ্রহ করা হয় এর বৈশিষ্ট্যই হল সরাসরি অনুসন্ধানক্ষেত্রে আহরণ করা (Original)। সাধারণত প্রাথমিক রাশিতথ্য কোনও সংস্থা বিশেষরূপে প্রকাশ করে থাকে। দেশে প্রতি দশ বছর অন্তর আদমসুমারীর (Census) সাহায্যে সংগৃহীত তথ্য প্রাথমিক রাশিতথ্য।

পরোক্ষ রাশিতথ্য প্রকাশিত বা অপ্রকাশিত উভয় উৎস থেকে পাওয়া যেতে পারে। কোনও সংস্থা প্রাথমিকভাবে নিজ প্রয়োজনে বা কাউকে তথ্য সরবরাহের জন্য তথ্য সংগ্রহ করে থাকলে সেই তথ্য অনুসন্ধানকারীর কাছে পরোক্ষ তথ্য হিসাবে আসে। দৈনিক, সাপ্তাহিক বা মাসিক সংবাদপত্রে যেসব সংবাদ পরিবেশিত হয় তা পরোক্ষ তথ্য, যেহেতু, এই তথ্য বিভিন্ন উৎস থেকে সংগৃহীত হয়।

একই তথ্য যে সংগ্রহ করছে তার কাছে প্রাথমিক তথ্য, আবার অন্য একজন যে ব্যবহার করছে তার কাছে অপ্রাথমিক তথ্য। যেমন আদমসুমারী বিভাগে সংগৃহীত তথ্য প্রাথমিক তথ্য, কিন্তু অন্য কোনও বিভাগ ইহা ব্যবহার করলে তা তার কাছে পরোক্ষ তথ্য।

1.2.1 প্রাথমিক ও অপ্রাথমিক রাশিতথ্য সংগ্রহের উৎস

প্রাথমিক রাশিতথ্য :

(i) ''Annual Report of the Railway Board'', ভারত সরকারের রেলমন্ত্রক কর্তৃক প্রকাশিত।

(ii) "Indian Coal Statistics" (বার্ষিক), ভারত সরকারের শ্রমমন্ত্রকের মাইনস্‌-এর প্রধান পর্যবেক্ষক কর্তৃক প্রকাশিত।

(iii) "Reserve Bank of Indian Bulletin" (মাসিক), ভারতীয় রিজার্ভ ব্যাঙ্ক, মুম্বাই কর্তৃক প্রকাশিত।

(iv) "Indian Textile Bulletin" (মাসিক), Textile Commissioner, মুম্বই কর্তৃক প্রকাশিত।

(v) "Jute Bulletin" (মাসিক), ভারত সরকারের, ভারতীয় কেন্দ্রিয় জুট কমিটি কর্তৃক প্রকাশিত।

অপ্রাথমিক রাশিতথ্য :

(i) "Monthly Abstract of Statistics" কেন্দ্রীয় পরিসংখ্যান সংগঠন, দিল্লী কর্তৃক প্রকাশিত।

(ii) "Statistical Abstract of the Indian Union" (বাৎসরিক), কেন্দ্রীয় পরিসংখ্যান সংগঠন, দিল্লী কর্তৃক প্রকাশিত।

1.2.2 প্রাথমিক রাশিতথ্য সংগ্রহের পদ্ধতি

(i) প্রত্যক্ষ ব্যক্তিগত অনুসন্ধান

(ii) অপ্রত্যক্ষ মৌখিক অনুসন্ধান

(iii) ডাকের মাধ্যমে প্রশ্নমালার দ্বারা অনুসন্ধান

(iv) অনুসন্ধানকারী মারফত তালিকা দ্বারা অনুসন্ধান

(v) দূরভাষ মাধ্যমে অনুসন্ধান

প্রাথমিক রাশিতথ্য উপরোক্ত পদ্ধতিগুলির মাধ্যমে সংগৃহীত হয়। ভৌগোলিক এলাকার সীমানা ছোট হলে প্রত্যক্ষ ব্যক্তিগত অনুসন্ধান পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। কিন্তু এলাকা বড় হলে তা অসম্ভব হয়ে উঠে এবং তখন প্রতিনিধি পাঠিয়ে বিভিন্ন জায়গা থেকে অপ্রত্যক্ষ মৌখিক অনুসন্ধান করা হয়। খবরের কাগজের তথ্য সাধারণত, এই প্রক্রিয়ায় করা হয়। যদিও এই পদ্ধতিতে অপেক্ষাকৃত কম খরচে ও তাড়াতাড়ি রাশিতথ্য সংগ্রহ করা যায়, তবু এই তথ্য ব্যক্তিগত পক্ষপাতদুষ্ট হওয়ার সম্ভাবনা থাকে।

প্রশ্নমালা দ্বারা তথ্যানুসন্ধান সাধারণত দু'ধরনের হয়—ডাকের মাধ্যমে প্রশ্নমালা পাঠালে উত্তরকারীরাই তা পূরণ করে ও অনুসন্ধানকারী মারফত উত্তরদাতার কাছ থেকে উত্তর জেনে তা পূরণ করা। যে সব উৎস থেকে নির্ভরযোগ্য তথ্য পাওয়া যাবে তাদের একটি তালিকা প্রথমে তৈরি করা হয় এবং তাদেরকে একটি প্রশ্নমালা ডাকযোগে বা নিজস্ব প্রতিনিধি দ্বারা পাঠানো হয়। ডাকযোগে পাঠানো হলে উত্তরদাতাকে একটি নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে উত্তর সহযোগে প্রশ্নমালাটি ডাকযোগে ফেরত পাঠানোর অনুরোধ করা হয়। প্রশ্নমালা প্রস্তুতিতে সাবধানতা অবলম্বন করা হয় যাতে কোনও অবান্তর বা বিভ্রান্তিমূলক প্রশ্ন না থাকে। প্রশ্নের সঙ্গে সঙ্গে তার উত্তরের জন্য জায়গা রাখা হয়। উত্তর পাঠাতে যাতে কোনও অসুবিধা না হয় সেজন্য প্রশ্নমালার সঙ্গে সঙ্গে জবাবী খামও সাধারণ পাঠানো হয়। ডাকব্যবস্থার সুবিধা নিয়ে সহজেই এক বিশাল ভৌগোলিক এলাকা থেকে এভাবে প্রয়োজনীয় তথ্য সংগ্রহ করা যায়।

প্রশ্নমালা পাঠানোর সময় লক্ষ্য রাখতে হয় যে, প্রশ্নগুলি ঠিকমত তৈরি হয়েছে কিনা এবং এদের উত্তর প্রয়োজনীয় তথ্য সংগ্রহের জন্য উপযুক্ত কিনা। কি উদ্দেশ্যে তথ্য সংগ্রহ করা হচ্ছে তা পরিষ্কারভাবে জানানো উচিত। এই সঙ্গে জানিয়ে দিতে হয় যে, উত্তরদাতার নাম-ধাম গোপন রাখা হবেও তার প্রদত্ত উত্তর কোন সময় তাকে অসুবিধায় ফেলবে না। প্রয়োজনে উত্তর ফেরত পাওয়ায় নির্দিষ্ট সময় উত্তীর্ণ হয়ে গেলে আবার চিঠি দিয়ে উত্তর পাঠানোর অনুরোধ করতে হয়।

প্রশ্নমালা তৈরি করার কিছু বিষয়ে লক্ষ্য রাখা প্রয়োজন। কোনও ব্যক্তিগত প্রশ্ন প্রশ্নমালায় থাকা উচিত নয়। কীভাবে উত্তর দিতে হবে সে ব্যাপারে উত্তরদাতাদের স্পষ্ট নির্দেশ দিতে হবে। প্রশ্নের সংখ্যা খুব বেশি হলে উত্তরদাতা ক্লান্তি ও বিরক্তি বোধ করতে পারে। প্রশ্নগুলি অবশ্যই সরাসরি, সহজ, ছোট ও যথাসম্ভব বস্তুনির্ভর হওয়া উচিত। এগুলি যথাসম্ভব 'হ্যাঁ' বা 'না' ধরনের উত্তরের উপযোগী হলে ভালো হয়। প্রশ্নগুলি যুক্তি সঙ্গতভাবে পরপর সাজানো উচিত এবং প্রশ্নের উত্তর যাতে অন্য প্রশ্নগুলির উত্তরের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ হয় তা দেখতে হবে। এসব সতর্কতা সত্ত্বেও প্রশ্নমালা পাঠানোর পদ্ধতি অনেক সময় ফলপ্রসূ হয় না। কারণ এক্ষেত্রে কেবলমাত্র শিক্ষিত ব্যক্তিদের ক্ষেত্রেই এই

পদ্ধতি ব্যবহার করা যায় এবং উত্তরকারীরা অধিকাংশ ক্ষেত্রে তেমন গুরুত্ব না দেওয়ার ফলে সঠিক উত্তর পাওয়া যায় না বা আদৌ উত্তর পাওয়া যায় না। এই পদ্ধতির এটাই বড় ত্রুটি।

প্রশ্নমালা ডাকে পাঠানো ছাড়া অন্য একটি উপায় হল, নিজস্ব প্রতিনিধি প্রশ্নমালা নিয়ে গিয়ে উত্তরদাতার কাছে থেকে উত্তর জেনে নিয়ে তা পূরণ করবে। এতে উত্তর না পাওয়ার সম্ভাবনা কমে। যারা অনিচ্ছুক উত্তরদাতা তাদেরকে বুঝিয়ে উত্তর পাওয়ার চেষ্টা করা যায়, আবার যারা উত্তর দেওয়ায় মতো উপযুক্ত শিক্ষিত নয় তাদের কাছ থেকেও উত্তর পাওয়ার চেষ্টা করা হয়। এই পদ্ধতিতে খরচ অনেক বেশি হয়।

খুব তাড়াতাড়ি উত্তর পাওয়ার জন্য দূরভাষের (telephone) মাধ্যমে প্রশ্নের উত্তর পাওয়ার পদ্ধতিকে দূরভাষ মাধ্যম অনুসন্ধান বলে। এই পদ্ধতিতে খুব পরিচিত ব্যক্তি এবং যেখানে দূরভাষের ব্যবস্থা আছে কেবলমাত্র সেখানে তথ্য সংগ্রহ করা যায়। এই পদ্ধতির অসুবিধা হল, কোন কোনও সময় উত্তরদাতা অনেকে প্রশ্নের উত্তর এড়িয়ে যায়।

1.2.3 অপ্রাথমিক রাশিতথ্য ব্যবহারের সতর্কতামূলক ব্যবস্থাসমূহ

অপ্রাথমিক রাশিতথ্যের অনেক সীমাবদ্ধতা আছে। সুতরাং এদের ব্যবহারের পূর্বে ব্যবহারকারীকে নিম্নলিখিত বিষয়গুলিতে অবশ্যই সতর্ক থাকতে হবে :

(i) রাশিতথ্যমালা সংগ্রহকারীর বিশ্বস্ততা ও নির্ভরযোগ্যতা ;

(ii) কি উদ্দেশ্যে রাশিতথ্যমালা সংগ্রহ করা হয়েছিল এবং অনুসন্ধানের কতদূর সুযোগ ছিল ;

(iii) অনুসন্ধানের সময় ও ক্ষেত্রের পরিধি ;

(iv) সংগ্রহের পদ্ধতিসমূহ ;

(v) প্রকৃত রাশিতথ্যমালার উপযুক্ততা;

(vi) প্রকৃত রাশিতথ্যমালায় কেমন সংজ্ঞাসমূহ ও এককসমূহ ব্যবহৃত হয়েছে;

(vii) প্রকৃত রাশিতথ্যমালার সঠিকতা।

1.3 ব্যবসায়িক সিদ্ধান্তে রাশিবিজ্ঞানের গুরুত্ব ও সুযোগ

বাণিজ্যিক সিদ্ধান্তগ্রহণের ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞানের গুরুত্ব অপরিসীম। বাজারদর, উৎপাদন, অর্থসংক্রান্ত ব্যাপার, ব্যাঙ্কের কারবার, বিনিয়োগ, ক্রয়বিক্রয় ইত্যাদির নিজ নিজ পরিকল্পনা রূপায়নের ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞান গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা গ্রহণ করে। কি উৎপাদন করা হবে? কিভাবে উৎপাদন করা হবে? কখন উৎপাদন করা হবে? কার জন্য উৎপাদন করা হবে? এ ধরনের বিষয়ে সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে আমরা রাশিবিজ্ঞানের বিশ্লেষণের উপর অনেকটা নির্ভরশীল। অর্থনৈতিক সংস্থাগুলি প্রচণ্ডভাবে রাশিবিজ্ঞানের বিশ্লেষণের উপর নির্ভর করে তাদের বিভিন্ন অর্থনৈতিক সিদ্ধান্তগুলি গ্রহণ করে। আজকাল বিভিন্ন ব্যাঙ্কিং সংস্থাগুলি তথ্যসংগ্রহ ও তার বিশ্লেষণের জন্য নিজেদের গবেষণা বিভাগ তৈরি করেছে। এই বিভাগ তাদের নিজস্ব ব্যবসার পাশাপাশি বর্তমান অর্থনৈতিক পরিস্থিতি এবং তাদের সম্ভাবনাময় ক্ষেত্রগুলির উপর রাশিবিজ্ঞান নির্ভর গবেষণা নিরন্তর করে চলেছে। বিনিয়োগকারীর সঠিক

এবং মূল্যবান সিদ্ধান্তগ্রহনের ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞানই একমাত্র পথ। কোনগুলি ভাল আয়ের সম্ভাবনাময় ক্ষেত্র, কোনগুলিই বা নিরাপদ ক্ষেত্র ইত্যাদি বিষয়ে বিনিয়োগকারী রাশিতথ্যের বিশ্লেষণের উপর সম্পূর্ণভাবে নির্ভরশীল। উৎপাদকের মত ক্রেতাও রাশিতথ্যের বিশ্লেষণের উপর নির্ভর করে এই সকল বিষয়ে সিদ্ধান্ত নেয়—কি কিনব? কত পরিমাণ কিনব? কোন সময়ে কিনব? কোথায় কিনব? কাদের জন্য কিনব?

একজন ব্যবস্থাপকের (Manager) রাশিতথ্যের বিশ্লেষণের মাধ্যমে ভবিষ্যতের ব্যবসায়িক সিদ্ধান্তগ্রহণের গুণ থাকা অবশ্যই বাঞ্ছনীয়। তথ্য বিশ্লেষণের দ্বারা সঠিক ও স্পষ্ট বাণিজ্যিক সিদ্ধান্ত নিতে রাশিবিজ্ঞান সহায়তা করে। সংক্ষিপ্ত সময়ে ও কম খরচে বাজার অনুসন্ধানের জন্য রাশিবিজ্ঞান সঠিক ধারণা দেয়। অভিজ্ঞতালব্ধ রাশিতথ্যের বিশ্লেষণের দ্বারা গৃহীত সিদ্ধান্ত ঊর্দ্ধতন কর্তৃপক্ষের কাছে প্রতিষ্ঠিত করা একজন ব্যবস্থাপকের পক্ষে সহজ হয়। পরিমাণগত বিষয় ছাড়াও গুণগত ও উৎকর্ষগত বিষয়ের ক্ষেত্রেও রাশিবিজ্ঞানের পরিমাপকগুলির বহুক্ষেত্রে সাহায্য নেওয়া হয়ে থাকে।

সুতরাং বোঝা যাচ্ছে, বাণিজ্যিক সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞান সদর্থক ভূমিকা পালন করে। একজন ব্যবস্থাপক তাঁর কর্মীদের কর্মক্ষমতা, কর্মদক্ষতা, কার্যকারিতা সম্পর্কে ধারণা পেতে এবং উৎপাদন ক্ষমতা বৃদ্ধির জন্য রাশিবিজ্ঞানের উপর নির্ভর করেন। বর্তমান দিনে এমন কোন ব্যবসা নেই যেখানে রাশিবিজ্ঞান ও তার বিভিন্ন পদ্ধতির ব্যবহার হয় না এবং আশাকরা যায় ভবিষ্যতেও এই ব্যবস্থার অন্যথা হবে না। এটাই সঠিক সময়, ব্যবসায়িক ও ব্যবস্থাপকগণের রাশিবিজ্ঞানের বিভিন্ন পদ্ধতির সঙ্গে মানিয়ে নিয়ে নিজেদের তৈরি করার।

1.4 সীমাবদ্ধতা

বর্তমানদিনে ব্যবসায়িক সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য রাশিবিজ্ঞানের অপরিহার্য্যতা সর্বজনগ্রাহ্য। কিন্তু ব্যবহারিক ক্ষেত্রে উহার নিম্নলিখিত সীমাবদ্ধতাগুলি পরিলক্ষিত হয়—

(১) রাশিবিজ্ঞান বিশেষ ধরনের তথ্যের ক্ষেত্রে কার্যকর নয় :

কোন সংস্থার চারজন কর্মী অবসর গ্রহণ করল বা কোন সংস্থার ৭৫% লোক ছুটিতে গেল, এই ধরনের নির্দিষ্ঠ বিষয়ের উপর রাশিবিজ্ঞানের বিশ্লেষণ কার্যকর নয় (যেহেতু বিষয়গুলিকে একই ধরনের কোন শ্রেণীতে অন্তর্ভুক্ত করা যায় না), তাই সেই বিষয়গুলো যতই গুরুত্বপূর্ণ হোক না কেন।

(২) ঘটনার সমস্ত বিষয়ের উপর নির্ভর না করে সিদ্ধান্তগ্রহণ :

অনেক ঘটনা আছে যেগুলি একাধিক বিষয়ের উপর নির্ভরশীল ও সেগুলির প্রভাব সবসময় বিবেচনা করা সম্ভব হয় না। যেমন কোন অঞ্চলের অর্থনৈতিক অবস্থা, শিক্ষাগত মান, সাংস্কৃতিক রীতিনীতি, ধর্ম, সরকারি নীতি ইত্যাদি অনেকক্ষেত্রে রাশিতথ্যের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় না। সুতরাং বিভিন্ন বিষয়ের অবহেলার জন্য ঘটনাটির সিদ্ধান্ত ১০০% সঠিক হয় না।

(৩) রাশিতথ্যের সংগ্রহের নীতিজ্ঞান শূন্যতার দায় :

অনেকক্ষেত্রে রাশিতথ্যের সংগ্রহ অনঅভিজ্ঞ বা অসৎ বা পক্ষপাদদুষ্ঠ কোন ব্যক্তি বা সংস্থা দ্বারা হয়ে থাকে। সেক্ষেত্রে সিদ্ধান্তের বিকৃতকরণ ঘটে।

(৪) সঠিক নীতির অভাব :

বিষয়টি সম্ভাবনা (Probability) নির্ভর। সুতরাং এখানের সিদ্ধান্তগুলি বৈজ্ঞানিক নীতির মত সঠিক নয়। সম্ভাবনা ও প্রক্ষেপের (Interpolation) মাধ্যমে কোন সংস্থার কোন নির্দিষ্ট বছরের উৎপাদন অনুমান করা যায় মাত্র কিন্তু তাকে ১০০% সঠিক বলে দাবি করা যায় না।

(৫) নির্দিষ্ট ঘটনার সিদ্ধান্ত গ্রহণে বিভিন্ন পদ্ধতির ব্যবহার :

কোন ঘটনার সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য আমরা একাধিক পদ্ধতির (চতুর্থ্যক বিচ্যুতি, গড় বিচ্যুতি, সম্যক বিচ্যুতি ইত্যাদি) ব্যবহার করি এবং অনেকসময় প্রতিটি ক্ষেত্রে ফলাফলের পার্থক্য দেখা যায়।

(৬) নমুনার (Sample) আকার ছোট হওয়া :

মনে কর, কোন অঞ্চলের কোন জিনিসের চাহিদা বা যোগান নিরুপণের প্রয়োজন। এক্ষেত্রে উক্ত অঞ্চলের ছোট নমুনার উপর গৃহিত রাশিবিজ্ঞানের সিদ্ধান্ত অনেক সময় সঠিক হয় না।

(৭) পক্ষপাত দুষ্ট ফলাফল :

রাশিবিজ্ঞানের বিশ্লেষণের দ্বারা কোন সংস্থার কোন উৎপাদিত বস্তু ক্রটিপূর্ণ বলে পক্ষপাত দুষ্ট হয়ে বিবেচিত হল এবং সংস্থার ব্যবস্থাপক উক্ত ফলের উপর ভিত্তি করে কোন সিদ্ধান্ত গ্রহণ করলেন। ফলশ্রুতি হিসেবে তিনি তাঁর সিদ্ধান্তে অপরিতৃপ্ত হয়ে, সিদ্ধান্তহীনতায় ভুগতে পারেন।

(৮) রাশিবিজ্ঞানের প্রয়োগের ক্ষেত্রে সবচেয়ে বড় সীমাবদ্ধতা হল, লঘুহস্তে রাশিতথ্যের বিশ্লেষণ ও ফলস্বরূপ সিদ্ধান্তে বিকৃতি।

1.5 অনুশীলনী

(১) উদাহরণ সহ প্রাথমিক ও অপ্রাথমিক রাশিতথ্যের সংজ্ঞা দিন।

(২) অপ্রাথমিক রাশিতথ্যের দুটি উৎস লিখুন।

(৩) প্রাথমিক রাশিতথ্য সংগ্রহের বিভিন্ন পদ্ধতির বর্ণনা দাও এবং এদের সুবিধাগুলি আলোচনা করুন।

(৪) রাশিবিজ্ঞানের রাশিতথ্যমালা সাধারণত দুই প্রকারের—(i) প্রাথমিক, (ii) অপ্রাথমিক—উক্তিটি ব্যাখ্যা করুন।

(৫) প্রাথমিক রাশিতথ্য ও অপ্রাথমিক রাশিতথ্যের মধ্যে পার্থক্য বলুন।

(৬) লঘুহস্তে রাশিতথ্যের বিশ্লেষণের ফল কী হতে পারে?

(৭) ব্যবসায়িক সিদ্ধান্তে রাশিবিজ্ঞানের গুরুত্ব ও সুযোগ সম্পর্কে আলোচনা করুন।

(৮) রাশিবিজ্ঞানের সীমাবদ্ধতা আলোচনা করুন।

একক 2 ❑ রাশিতথ্যের সংকলন ও উপস্থাপন (Collection and Presentation of Data)

গঠন

2.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়বার পর আপনি জানতে পারবেন

- রাশিতথ্যের শ্রেণীবিন্যাসকরণ
- রাশিতথ্যের উপস্থাপন ও তার প্রকারভেদ
- বিভিন্ন পদ্ধতিতে শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন উপস্থাপনা ও
- বিভিন্ন ধরনের লেখচিত্রের প্রকার

2.1 প্রস্তাবনা

আদমসুমারী (Census) বা নমুনা তদন্ত (Sample Servey) পদ্ধতিতে সংগৃহীত রাশিতথ্যমালা যদি সঠিক আকারে সাজানো ও উপযুক্তভাবে উপস্থাপন করা না হয়, তবে সংগৃহীত রাশিতথ্য মূল্যহীন হয়ে পড়ে। এই এককে উক্ত বিষয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হল।

2.2 রাশিতথ্যের শ্রেণীবিন্যাসকরণ

পরিসংখ্যানীয় রাশিতথ্য সমূহের প্রকৃতি, তাদের সাদৃশ্য ও তদন্তের উদ্দেশ্যের উপর নির্ভর করে বিভিন্ন শ্রেণী বা বিভাগে বিভক্ত করার পদ্ধতিই হল শ্রেণীবিন্যাসকরণ। রাশিতথ্যসমূহকে নিম্নলিখিত চারটি বিভিন্ন পদ্ধতিতে শ্রেণীবিন্যাসিত করা হয়।

(i) গুনের ভিত্তিতে (On qualitative basis) : যদি সংগৃহীত রাশিতথ্যের শ্রেণীবিন্যাসকরণ কোনো অপরিমেয় বৈশিষ্ট্যের সাপেক্ষে করা হয়, তবে তাকে গুনের ভিত্তিতে শ্রেণীবিন্যাসকরণ বলে। যেমন—লিঙ্গ (Gender), জাতি, পেশা ইত্যাদির সাপেক্ষে শ্রেণীবিন্যাসকরণ।

(ii) পরিসংখ্যান ভিত্তিতে (On quantitative basis) : রাশিতথ্যসমূহের বৈশিষ্ট্যগুলি পরিমেয় হলে অর্থাৎ সংখ্যা বা রাশির দ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব হলে, এদের শ্রেণীবিন্যাসকরণকে পরিমাপের ভিত্তিতে শ্রেণীবিন্যাস বলে। যেমন—কোন দেশে জনসংখ্যার বয়স, আয়, উচ্চতা ইত্যাদির সাপেক্ষে শ্রেণীবিন্যাসকরণ।

(iii) সময়ের ভিত্তিতে (On the basis of time) : এই শ্রেণীবিন্যাসকরণ পদ্ধতিতে রাশিতথ্যসমূহের বিভিন্ন সময়ে পরিলক্ষিত মানগুলি সময়ের সাপেক্ষে শ্রেণীবিন্যাস করা হয়। এই পদ্ধতিতে বিন্যাসিত রাশিতথ্যসমূহকে কালীনসারি (Time Series) বলে। যেমন—প্রতি মাসে কোন কারখানায় কি পরিমাণ সামগ্রী উৎপন্ন হয়েছে তার হিসাব।

(iv) ভৌগলিক অবস্থানের ভিত্তিতে (On Geographical basis) : রাশিতথ্যসমূহ পরিসংখ্যানের জন্য ভৌগোলিক অঞ্চলের (যেমন জেলা, রাজ্য, দেশ ইত্যাদি) ভিত্তিতে শ্রেণীবিন্যাস করার পদ্ধতিতে ভৌগোলিক অবস্থানের ভিত্তিতে শ্রেণীবিন্যাস বলে। যেমন—ভারতের লোকসংখ্যা রাজ্য বা জেলা সাপেক্ষে শ্রেণীবিন্যাসকরণ।

2.3 রাশিতথ্যের উপস্থাপনা

সাধারণত রাশিতথ্য নিম্নলিখিত তিনটি পদ্ধতিতে উপস্থাপন করা হয় :

(i) বিবরণের মাধ্যমে (Textual Presentation)

(ii) ছকের মাধ্যমে (Tabular Presentation)

(iii) প্রতিলিপি বা চিত্রের মাধ্যমে (Diagrammatic Presentation)

(i) বিবরণের মাধ্যমে : এই পদ্ধতিতে রাশিতথ্যকে একটি বিবরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। বিবরণমূলক উপস্থাপনায় অনুসন্ধানকারীর পক্ষে দীর্ঘ বিবরণের মাঝখান থেকে রাশিতথ্যের গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্যগুলিকে দৃষ্টিগোচর আনা খুব কষ্টকর হয়।

(ii) ছকের মাধ্যমে : এই পদ্ধতিতে সংগৃহীত রাশিতথ্যকে একটি সুবিন্যস্ত ছকের (Table) মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। রাশিতথ্যের এরকম সুনিব্যস্ত একটি ছকে শ্রেণী বিন্যস্ত রাশিতথ্যকে উপর থেকে নীচে এবং বামদিক তেকে ডানদিকে সুশৃঙ্খল ও সারিবদ্ধভাবে সন্নিবেশ করা হয়।

একটি ছকের বিভিন্ন অংশগুলি হল :

(a) ছক বা সারণি নং (Table Number) : সহজে সনাক্ত করার জন্য ছক বা সারণির একটি নম্বর দেওয়া হয়, বিশেষ করে যখন একাধিক ছক একসঙ্গে প্রস্তুত করা হয়।

(b) শিরোনাম (Title) : ছকের বিষয়বস্তুর সংক্ষিপ্ত বিবরণ দিয়ে উহার উপরে লিখিত অংশটিকে শিরোনাম বলা হয়।

(c) ছক বা সারণির বামপার্শ্বের বিবরণ লিপি (Stub or Row Headings) : এটি ছকের বামদিক থেকে ডানদিকে সারিকৃত রাশিমালার বিবরণ লিপি।

(d) ছকের উপরিভাগের বিবরণ লিপি (Caption or Column Headings) : এটি ছকের উপর থেকে নীচে সারিকৃত রাশিমালার বিবরণ লিপি।

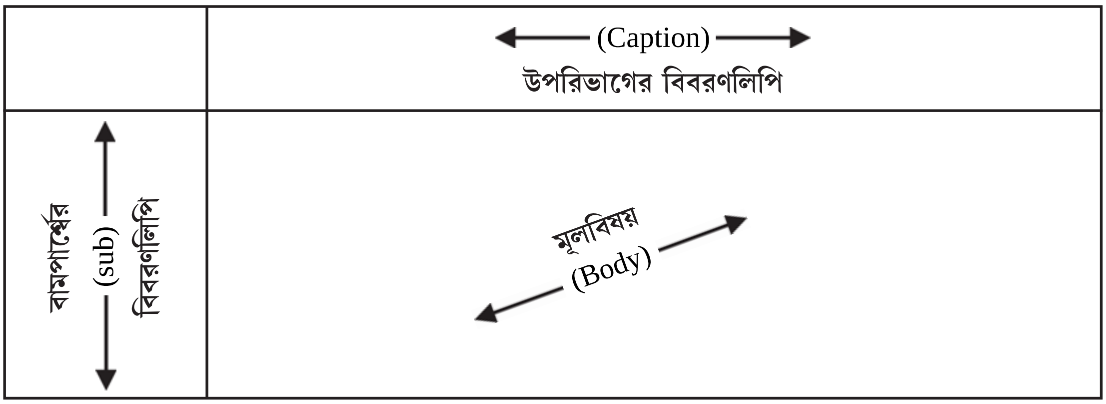
(e) মূল অংশ (Body or Data) : এই অংশে রাশিতথ্য প্রকাশ করা হয়।

(f) পাদটীকা (Foot note) : ইহা ছকের নীচে থাকে। এই অংশে তথ্যের উৎস বর্ণনা এবং ছকে ব্যবহৃত কোনও পদের ব্যাখ্যা (explanation) করা হয়।

নিম্নে একটি ছকের বিভিন্ন অংশ দেখান হল :

সারণি নং—

শিরোনাম



উৎস :

পাদটীকা :

ছক তৈরি করার ক্ষেত্রে বাঁধাধরা কোনও নিয়ম নেই। তবে ছক এমনভাবে তৈরি করতে হবে যাতে রাশিতথ্যের অন্তর্নিহিত অর্থ খুব স্পষ্ট ও সহজে বোধগম্য হয়। যদি ছক জটিল হয় তবে তা ভেঙে সহজে বোধগম্য এরূপ কয়েকটি পৃথক সরল ছকে প্রকাশ করা বাঞ্ছনীয়।

উদাহরণ ১. পাঁচটি কারখানার দু'টি ভিন্ন তারিখে স্ত্রী-পুরুষের আঠার বছরের কম এবং আঠার বছরের বা তার বেশি দু'টি বিভাগে গড় আয়ের শূন্য ছক প্রস্তুত করুন।

সমাধান :

সারণি নং ২.১

পাঁচটি কারখানায় গড় আয়

কারখানা	তারিখ—				তারিখ—				
	১৮ বছর নিচে		১৮-বছর বা তার উপর		১৮ বছরের নিচে		১৮ বছর বা তার উপর		
	স্ত্রী	পুরুষ	স্ত্রী	পুরুষ	স্ত্রী	পুরুষ	স্ত্রী	পুরুষ	স্ত্রী
১									
২									
৩									
৪									
৫									
মোট									

(iii) প্রতিলিপি বা চিত্রের মাধ্যমে—এই পদ্ধতিতে সংগৃহীত তথ্যকে লেখ, চার্ট, ছবি ইত্যাদির সাহায্যে উপস্থাপন করা হয়। পরের একটি অনুচ্ছেদে এর বিষয় আলোচনা করা হবে।

2.4 পরিসংখ্যান বিভাজন

কোনও বিশেষ অনুসন্ধান ক্ষেত্রে যাদের সম্বন্ধে তথ্য সংগ্রহ করা হয় তাদের সমষ্টিকে সমগ্রক (Population বা Universe) বলে। সমগ্রকের যে বৈশিষ্ট্যকে সংখ্যার দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাকে পরিমেয় বৈশিষ্ট্য বা চলক (Variable) বলে। যেমন—বিক্রয়, রপ্তানী, উৎপাদন, আয়, উচ্চতা, ওজন, বয়স ইত্যাদি চলক। কোনও একটি চলকের সংগৃহীত মানগুলি যদি বিস্তৃত বা বিশৃঙ্খলভাবে লিপিবদ্ধ থাকে, তবে রাশিবিজ্ঞানবিদদের পক্ষে ঐ মানগুলি পুঙ্খানুপুঙ্খভাবে পরীক্ষা করে তার অন্তর্নিহিত অর্থ খুঁজে বের করা কষ্টসাধ্য বা অসম্ভব হতে পারে। অন্তর্নিহিত অর্থ সম্পর্কে সঠিক মূল্যায়নের জন্য চলকের মানগুলিকে সারিকরনের মাধ্যমে সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করা জরুরি। পরিসংখ্যানে বিশৃঙ্খলভাবে সজ্জিত চলকের মানগুলিকে সারিকরণ বা বিভাগীকরণ পরিসংখ্যান বিভাজন (Frequency distribution) বলে। কোনও একটি নির্দিষ্ট শ্রেণীর মধ্যে চলকের যতগুলি মান পড়বে সেই সংখ্যাকে উক্ত শ্রেণীর পরিসংখ্যান (Frequency) বলে এবং যে ছকের মাধ্যমে চলকের সারিকৃত মান ও তার পরিসংখ্যা প্রকাশ করা হয়, তাকে পরিসংখ্যা ছক বা সারণি (Frequency Tabel) বলে।

পরিসংখ্যা বিভাজন দুই প্রকারের হয় : (i) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন (Simple Frequency Distribution) এবং (ii) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন (Grouped Frequency Distribution)

(i) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন : এই বিভাজনে চলকের বিভিন্ন মান ও তাদের পরিসংখ্যা স্বতন্ত্রভাবে প্রকাশ করা হয়। নিচে 30 জন ছাত্রের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হল তা থেকে গঠিত সরল পরিসংখ্যা বিভাজন দেখানো হল :

30 জনের প্রাপ্ত নম্বর : 20, 25, 41, 27, 20, 27, 20, 46, 32, 27, 25, 46, 32, 27, 25, 46, 32, 41, 32, 27, 27, 25, 32, 41, 32, 25, 41, 27, 32, 27, 32, 41, 25, 27.

সারণি নং ২.২

30 জন ছাত্রের নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন

নম্বর	টালিমার্ক	পরিসংখ্যা
20	///	3
25	~~////~~ /	5
27	~~////~~ ///	8
32	~~////~~ //	7
41	~~////~~ /	5
46	//	3
মোট	—	30

নম্বর 20 : পরিসংখ্যা 3 বলতে বোঝায় 20 নম্বর পেয়েছে এরকম ছাত্রের সংখ্যা 3। উপরের টালিমার্ক হ'ল হেলানো দাগ (/) যার চারটির পরে পঞ্চমটি আড়াআড়িভাবে দেওয়া হয়। এরকম পাঁচটি টালিমার্কের একটি গুচ্ছের পরে একটু বেশি ফাঁক দেওয়া হয়। টালিমার্ক সবসময় মান বা মানের শ্রেণীর একই লাইনে বসাতে হবে। পরিসংখ্যার গণনার পক্ষে এই পদ্ধতি সুবিধাজনক।

(ii) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন—চলকের মান অল্পসংখ্যক হলে সরল পরিসংখ্যা বিভাজন যথোপযুক্ত। যে ক্ষেত্রে চলকের প্রচুর মান রয়েছে, সেক্ষেত্রে এইভাবে বিভাজন প্রায় অসম্ভব। এক্ষেত্রে পরিসংখ্যা ছককে সংক্ষিপ্তকরণের জন্য সংগৃহীত রাশিতথ্য মালাকে সঠিকভাবে অনুধাবনের জন্য চলকের মানের প্রসার (range) কে কতকগুলি সসীম উপপ্রসার (sub-range) -এ ভাগ করে সেই অনুযায়ী শ্রেণীবদ্ধ করা হয়। ফলে, শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন প্রক্রিয়ায় চলকের মানগুলি কতকগুলি সসীম উপপ্রসারে শ্রেণীবদ্ধ করে শ্রেণীগুলির পরিসংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা হয়। শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে চলকের কোন একটি বিশেষ মানের পরিসংখ্যা জানা যায় না।

নিচে 100 জন ছাত্রের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হল এবং তা থেকে গঠিত শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন দেখানো হল :

100 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর :

3	23	24	8	16	23	16	20	24	20
15	8	21	29	50	24	33	42	30	20
24	35	8	26	38	30	26	38	24	26
24	26	24	15	10	10	16	26	45	45
30	29	33	24	26	24	13	24	26	24
26	45	21	21	21	23	44	13	35	23
23	30	21	23	46	42	24	16	13	15
20	26	33	29	42	24	20	29	20	15
15	21	21	21	26	37	27	44	29	23
16	15	31	24	31	26	24	23	31	20

সারিণ নং ২.৩

100 জন ছাত্রের নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন

নম্বর	টালিমার্ক	পরিসংখ্যা
1-5	/	1
6-10	~~////~~	5
11-15	~~////~~ ////	9
16-20	~~////~~ ~~////~~ //	12
21-25	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	31
26-30	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	20
31-35	~~////~~ ////	8
36-40	///	3
41-45	~~////~~ ///	8
46-50	///	3
মোট	—	100

2.4.1 পরিসংখ্যা বিভাজন গঠনে কিছু প্রাথমিক নির্দেশ

(i) শ্রেণীসংখ্যা খুব কম বা খুব বেশি হবে না। বেশি হলে গণনা কার্য দীর্ঘ ও জটিল হয়, আবার খুব কম হলে বৈশিষ্ট্যের সঠিকতা (accuracy) হারাবে। সাধারণত শ্রেণীসংখ্যা 5 থেকে 20 এর মধ্যে হয়।

(ii) শ্রেণিদৈর্ঘ্য যথাসম্ভব সমান হওয়া উচিত। অবশ্য কোনও কোনও ক্ষেত্রে এর ব্যতিক্রম হতে পারে। আয়ের পরিসংখ্যা বিভাজনে আয়ের প্রসার খুব বেশি হয়, যথা 100 টাকা থেকে 5000 টাকা। এক্ষেত্রে সমান শ্রেণীদৈর্ঘ্য সম্ভব নয়।

(iii) বিভাজনে চলকের সকল মানকে গণ্য করতে হবে। কোনও মান বাদ দেওয়া চলবে না।

(iv) শ্রেণীগুলি পরস্পর ব্যতিরেকী হবে অর্থাৎ একটি মান কেবলমাত্র একটি শ্রেণীতে থাকবে।

(v) মুক্ত প্রাপ্ত (open end) শ্রেণী যথাসম্ভব বর্জন করা উচিত।

2.5 শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনে ব্যবহৃত কিছু সংজ্ঞা

(i) অবিচ্ছিন্ন ও বিচ্ছিন্ন চলক (Continuous and Discrete variables) : কোনও চলকের সংগৃহীত বিভিন্ন মানগুলি যদি একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকে ঐ সীমাকে চলকের প্রসার (Range) বলে। যেমন কোনও শ্রেণীর ছাত্রদের উচ্চতার বিভিন্ন মানগুলি যদি 120 সেমি থেকে 180 সেমি-এর মধ্যে থাকে, তবে ছাত্রদের উচ্চতার প্রসার হবে (180 – 120) সেমি বা 60 সেমি। যদি একটি চলক এরূপ হয় যে, একটি নির্দিষ্ট প্রসারের অন্তর্বর্তী যে কোন মান উহা গ্রহণ করতে পারে, তবে চলকটিকে অবিচ্ছিন্ন চলক (continuous variable) বলে। আলোচ্য উদাহরণে কোন একজন ছাত্রের উচ্চতা 129 সেমি বা 129.8 সেমি বা 129.86 সেমি বা 120 সেমি থেকে 180 সেমি-এর মধ্যে যে কোনও সংখ্যা হতে পারে। অর্থাৎ অবিচ্ছিন্ন চলকের অসংখ্য মান থাকা সম্ভাব্য। আয়, উচ্চতা, ওজন, আয়তন, ঘনত্ব প্রভৃতি অবিচ্ছিন্ন চলকের উদাহরণ। কিন্তু কোনও চলক যদি এমন হয় যে, ইহা কেবল কয়েকটি বিচ্ছিন্ন (isolated) মান গ্রহণ করতে পারে, তবে উহাকে বিচ্ছিন্ন চলক (Discrete variable) বলে। কোনও দ্রব্যের উৎপাদন সংখ্যা, কোনও সভায় লোকের সংখ্যা, বিভিন্ন পরিবারে শিশুসংখ্যা, ফুটবল খেলায় গোলসংখ্যা, ক্রিকেট খেলায় রানসংখ্যা ইত্যাদি বিচ্ছিন্ন চলকের উদাহরণ। ফুটবল খেলায় গোলসংখ্যা কখনও ভগ্নাংশ হতে পারে না—ইহা সবসময়ই অখণ্ড পূর্ণসংখ্যা হবে। অন্যভাবে বলা যায়, মাপনীয় দ্বারা নির্ণীত চলকের মান অবিচ্ছিন্ন, কিন্তু গণনার দ্বারা নির্ণীত চলকের মান বিচ্ছিন্ন।

(ii) শ্রেণীবিভাগ বা শ্রেণী প্রসার (Class interval) : যদি চলক অবিচ্ছিন্ন হয় অথবা বিচ্ছিন্ন চলক অধিক সংখ্যক মান গ্রহণ করে, তবে চলকের মানের প্রসারকে কয়েকটি সসীম উপপ্রসারে বিভক্ত করে শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন প্রক্রিয়ায় প্রকাশ করা হয়। এইক্ষেত্রে চলকের উপপ্রসারকে শ্রেণীবিভাগ বা শ্রেণী প্রসার বলে। সারণি নং ২.৩-এর প্রথম স্তম্ভে উহা দেখানো হয়েছে। এইভাবে 1-5, 6-10, 11-15 ইত্যাদি বিভিন্ন শ্রেণী প্রসার।

যদি কোনও শ্রেণীর এক প্রান্তের মান অনুক্ত থাকে, তবে ইহাকে **মুক্তপ্রান্ত শ্রেণী** (open and class) বলে। কোনও পরিসংখ্যা বিভাজনে একটি বা দুটি মুক্ত প্রান্ত শ্রেণী থাকতে পারে। মুক্ত প্রান্ত শ্রেণী তখনই গঠন করা হয়, যখন প্রান্তীয় মান অন্যান্য মান থেকে অনেক দূরে থাকে, অন্যথায় কিছু শ্রেণীর পরিসংখ্যা হয়তো শূন্য লিখতে হবে।

(iii) শ্রেণী পরিসংখ্যা ও মোট পরিসংখ্যা (Class frequeny and Total frequency) : চলকের যতগুলি

মান একটি শ্রেণীর অন্তর্গত, সেই সংখ্যাকেই উহার শ্রেণী পরিসংখ্যা বলে। সারণি নং ২.৩-এ 16-20 শ্রেণী বিভাগের পরিসংখ্যা 12। সমস্ত শ্রেণী বিভাগের পরিসংখ্যার সমষ্টিকে মোট পরিসংখ্যা বলে। সারণি নং ২.৩ এর মোট পরিসংখ্যা 100।

(iv) শ্রেণী সীমা (Class Limit) এবং শ্রেণী সীমানা (Class Boundary) : কোনও শ্রেণী প্রসারের দুটি প্রান্তকে ঐ শ্রেণীর শ্রেণী সীমা (Class Limit) এবং বড়টিকে উর্ধ্বশ্রেণী সীমা (Upper Class Limit) বলে। সারণি নং ২.৩ এ 21-25 শ্রেণী প্রসারের নিম্নশ্রেণী সীমা 21 এবং উর্ধ্বশ্রেণী সীমা 25।

অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে, রাশিগুলিকে কোনও একটি এককের আসন্ন মান লিপিবদ্ধ করা হয়। যেমন, কিছু লোকের ওজনের বিভাজনের কথা ধরা যাক। যদি ওজন পাউন্ডের কাছাকাছি পরিমাপ করা হয়, তবে 99.5^{th} থেকে 109.5^{th}-এর মধ্যে সমস্ত রাশিতথ্য 100 – 109 শ্রেণীপ্রসারের অন্তর্ভুক্ত হবে। 100 – 109 শ্রেণী প্রসারের জন্য 99.5 কে নিম্নশ্রেণী সীমানা (Lower Class Boundary) এবং 109.5-কে উর্ধ্বশ্রেণী সীমানা (Upper Class Boudary) বলে। অনুরূপভাবে, 110-119 শ্রেণীপ্রসারের জন্য নিম্নশ্রেণী সীমানা ও উর্ধ্বশ্রেণী সীমানা যথাক্রমে 109.5 এবং 119.5। এক্ষেত্রে 99.5 থেকে 100.5 পর্যন্ত যে কোনও মানের আসন্ন মান 100। আবার 99.45 থেকে 99.55 পর্যন্ত যে কোনও মানের এক দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান 99.5। লক্ষণীয় যে, কোনও শ্রেণীর উর্ধ্বশ্রেণী সীমানা পরবর্তী শ্রেণী নিম্নশ্রেণী সীমানার সমান হয়। নিম্নলিখিত উপায়ে শ্রেণী সীমানা নির্ণয় করা হয়।

নিম্ন শ্রেণী সীমানা = নিম্নশ্রেণী সীমা $-\frac{d}{2}$

এবং উর্ধ্বশ্রেণী সীমানা = উর্ধ্বশ্রেণী সীমা $+\frac{d}{2}$

যেখানে d হল কোনও শ্রেণীর উর্ধ্বসীমা ও পরবর্তী শ্রেণীর নিম্নসীমার মধ্যে পার্থক্য।

(v) মধ্যবিন্দু (Mid point or Mid value or Class Mark) : কোনও শ্রেণীবিভাগের ঠিক মধ্যমানকে শ্রেণীর মধ্যবিন্দু বলে। ইহা দুটি শ্রেণীসীমা বা শ্রেণী সীমানার গড়, অর্থাৎ

মধ্যবিন্দু $=\frac{1}{2}$(নিম্নশ্রেণী সীমা + উর্ধ্বশ্রেণী সীমা)

$=\frac{1}{2}$(নিম্নশ্রেণী সীমানা + উর্ধ্বশ্রেণী সীমানা)

সারণি নং ২.৩-এ 26-30 শ্রেণীর মধ্যবিন্দু হল $\frac{1}{2}(26+30)$ বা 28।

(vi) শ্রেণী দৈর্ঘ্য (Size or Width of Class Inverval) : কোনও শ্রেণী বিভাগের উর্ধ্ব ও নিম্ন সীমানার অন্তরফলকে ঐ শ্রেণীর দৈর্ঘ্য বলে। সারণি নং ২.৩-এ 31-35 দৈর্ঘ্য 35.5 – 30.5 = 5 লক্ষণীয়। এই সারণিতে সমস্ত শ্রেণীর দৈর্ঘ্য 5।

(vii) পরিসংখ্যা ঘনত্ব (Frequency density) : কোনও শ্রেণী বিভাগের প্রতি একক শ্রেণী দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যাকে শ্রেণীটির পরিসংখ্যা ঘনত্ব বলে।

$$\text{পরিসংখ্যান ঘনত্ব} = \frac{\text{শ্রেণী পরিসংখ্যা}}{\text{শ্রেণী প্রসারের দৈর্ঘ্য}}$$

২.৩ নং সারণির 21-25 শ্রেণীর পরিসংখ্যা ঘনত্ব $= \frac{31}{5} = 6.2$

(viii) আনুপাতিক পরিসংখ্যা (Relative Frequency) : শ্রেণি বিভাগের পরিসংখ্যা যদি মোট পরিসংখ্যার অনুপাত হিসেবে প্রকাশ করা হয়, তবে তাকে ঐ শ্রেণীর আনুপাতিক পরিসংখ্যা বলে।

$$\text{আনুপাতিক পরিসংখ্যা} = \frac{\text{শ্রেণী পরিসংখ্যা}}{\text{মোট পরিসংখ্যা}}$$

২.৩ নং সারণির 41-45 শ্রেণীর আনুপাতিক পরিসংখ্যা হল $\frac{8}{100}$ বা 0.08।

সারণি নং ২.৪

শ্রেণী সীমা, শ্রেণী সীমানা, মধ্যবিন্দু, পরিসংখ্যা ঘনত্ব ও আনুপাতিক পরিসংখ্যা

শ্রেণী প্রসার	শ্রেণী পরিসংখ্যা	শ্রেণী সীমা		শ্রেণী সীমানা		মধ্যবিন্দু	শ্রেণী দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা ঘনত্ব	আনুপাতিক পরিসংখ্যা
		নিম্ন	উর্ধ্ব	নিম্ন	উর্ধ্ব				
1–5	1	1	5	0.5	5.5	3	5	0.2	0.01
6–10	5	6	10	5.5	10.5	8	5	1.0	0.05
11–15	9	11	15	10.5	15.5	13	5	1.8	0.09
16–20	12	16	20	15.5	20.5	18	5	2.4	0.12
21–25	31	21	25	20.5	25.5	23	5	6.2	0.31
26–30	20	26	30	25.5	30.5	28	5	4.0	0.20
31–35	8	31	35	30.5	35.5	33	5	1.6	0.08
36–40	3	36	40	35.5	40.5	38	5	0.6	0.03
41–45	8	41	45	40.5	45.5	43	5	1.6	0.08
46-50	3	46	50	45.5	50.5	48	5	0.6	0.03
মোট	100	—	—	—	—	—	—	—	1.00

2.5.1 শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন গঠন

শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন গঠনের জন্য নিম্নলিখিত ধাপগুলি অনুসরণ করা হয় :

(i) প্রথমে মানগুলির প্রসার (অর্থাৎ, সর্বোচ্চ মান—সর্বনিম্ন মান) নির্ণয় করা হয়।

(ii) প্রসারকে উপযুক্ত শ্রেণীবিভাগ সংখ্যায় ভাগ করতে হয়। ইহা এমনভাবে করা হয় যাতে শ্রেণী দৈর্ঘ্য বা তার গুণিতক হয়, গণনা কার্য সহজ হওয়ার উপযুক্ত।

(iii) প্রথম শ্রেণীর নিম্নসীমা শূন্য (0) বা 5 বা তার গুণিতক হওয়া উচিত। যেমন—যদি সর্বনিম্ন মান 27 এবং শ্রেণী বিভাগের দৈর্ঘ্য 10 হয়, তবে প্রথম শ্রেণী 27-37-এর পরিবর্তে 25-35 হওয়া উচিত।

(iv) টালিমার্কের সাহায্যে শ্রেণী পরিসংখ্যা নির্ণয় করা হয়।

(v) প্রথম স্তম্ভ শ্রেণী প্রসার ও দ্বিতীয় স্তম্ভে তার পরিসংখ্যা রেখে সারণি বা ছক তৈরি করতে হয়। এটাই নির্ণেয় পরিসংখ্যা বিভাজন হবে।

2.6 বিভিন্ন পদ্ধতিতে শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন উপস্থাপন

২.৩ নং সারণিতে শ্রেণীসীমা (Class Limits) ব্যবহার করে শ্রেণী প্রসার বা শ্রেণী বিভাগ দেখানো হয়েছে। নিচে আর কয়েকটি উপস্থাপন দেখান হল :

সারণি নং ২.৫

142 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর	
নম্বর	**পরিসংখ্যা**
0–10	5
10–20	10
20–30	20
30–40	40
40–50	30
50–60	20
60–70	10
70–80	4
80–90	2
90–100	1
মোট—	142

সারণি নং ২.৬

250 জন কর্মীর সাপ্তাহিক আয়	
আয় (টাকার)	**পরিসংখ্যা**
30–	3
32–	8
34–	24
36–	31
38–	50
40–	61
42–	38
44–	21
46–	12
48–50	2
মোট—	250

সারণি নং ২.৭

40 জন লোকের সাপ্তাহিক আয়	
আয় (টাকার)	**পরিসংখ্যা**
30 এর উপর কিন্তু 40 এর নীচে	8
40 এর উপর কিন্তু 50 এর নীচে	12
50 এর উপর কিন্তু 60 এর নীচে	6
60 এর উপর কিন্তু 70 এর নীচে	4
70 এর উপর কিন্তু 80 এর নীচে	10
মোট	40

সারণি নং ২.৮

80 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর	
নম্বর	**পরিসংখ্যা**
30-এর নীচে	7
30-40	12
40-50	25
50-60	16
60-70	15
70-এর উপর	5
মোট—	80

২.৫ নং সারণীতে শ্রেণী প্রসার শ্রেণী সীমানা (Class boundaries) দিয়ে দেখানো হয়েছে। **যে মানটি শ্রেণী সীমানার সঙ্গে সমান হয় তা সাধারণ পরবর্তী শ্রেণীতে ধরা হয়। যেমন নম্বর** 20 ও 30 যথাক্রমে 20-30 ও 30-40 শ্রেণীতে রয়েছে।

২.৬ নং সারণীতে শ্রেণীপ্রসার দেখানোর সময় উর্ধ্বশ্রেণী সীমা (Upper Class Limit) গুলে পরিষ্কারভাবে দেখানো হয়নি। প্রথম শ্রেণী প্রকৃতপক্ষে 30 ও তার উপর, কিন্তু 32-এর নিচে এবং দ্বিতীয় শ্রেণী 32 ও তার উপর, কিন্তু 34-এর নিচে।

২.৭ নং সারণিতে কোনও শ্রেণীর ঊর্ধ্বসীমা পরবর্তী শ্রেণীতে রয়েছে। যেমন প্রথম শ্রেণীর 40 দ্বিতীয় শ্রেণীতে, দ্বিতীয় শ্রেণীর 50 তৃতীয় শ্রেণীতে রয়েছে।

২.৮ নং সারণিতে প্রথম শ্রেণী ও শেষ শ্রেণী মুক্ত (Open)। ফলে প্রথম শ্রেণীর নিম্নসীমা ও শেষ শ্রেণীর উর্ধ্বসীমা অজানা। **যদি সকল শ্রেণী প্রসারের দৈর্ঘ্য সমান হয়, তবে মুক্ত প্রান্তীয় শ্রেণীগুলি সমপ্রসার বিশিষ্ট ধরা হয়, অন্যথায় তা অজানা থাকবে।**

2.6.1 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

পরিসংখ্যানে অনেক সময় চলকের একটি নির্দিষ্ট মান অপেক্ষা রাশিতথ্যমালার কতগুলি মান ছোট (বা বড়) তা জানার প্রয়োজন হয়। এইসব ক্ষেত্রে, নির্দিষ্ট মান পর্যন্ত বা মানের উপরে পরিসংখ্যাগুলিকে ক্রমান্বয়ে যোগ (accumulate) করতে হয়। এই ক্রমান্বয়ে যোগ করা পরিসংখ্যাকে বিভাজন প্রক্রিয়ায় যদি প্রথম বা উপর থেকে পরিসংখ্যা যথাক্রমে a, b, c, d ইত্যাদি হয়, তবে দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ইত্যাদি বিভাগ পর্যন্ত মোট পরিসংখ্যা হবে যথাক্রমে (a + b), (a + b + c), (a + b + c + d) ইত্যাদি এবং এগুলি যথাক্রমে বিভাগগুলির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নির্দেশ করে।

যতগুলি সংখ্যা নির্দিষ্ট মানের সমান বা তার চেয়ে নিচে সেই সংখ্যাকে "নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা" (Less than cumulative frequency) এবং কতগুলি সংখ্যা নির্দিষ্ট মানের সমান বা তার থেকে বেশী হয়। সেই সংখ্যাকে "উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা" (Greater-than cumulative frequency) বলে।

যদি চলকের বিভিন্ন মানও তার অনুরূপ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (নিচ থেকে বা উপর থেকে) একটি ছক বা সারণিতে সাজানো হয়, তবে তাকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন (Cumulative Frequency Distribution) বলে। শ্রেণীবদ্ধ রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে, ক্রমযেগিক পরিসংখ্যা অনুরূপ শ্রেণী সীমানার বিপরীতে লিখতে হয়। **কেবলমাত্র ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বলতে সাধারণত 'নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা'-কে বোঝায়।**

নিচে কয়েকটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক দেখানো হল :

সারণি নং ২.৯

30 জন ছাত্রের নম্বরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

নম্বর	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
		নিচ থেকে	উপর থেকে
20	3	3	30
25	5	8	27
27	8	16	22
32	7	23	14
41	5	28	7
46	2	30	2
মোট	30	—	—

সারণি নং ২.১০

60 জন ছাত্রের ওজনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

শ্রেণী সীমানা	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
		নিচ থেকে	উপর থেকে
29.5	0	0	60
34.5	3	3	57
39.5	5	8	52
44.5	12	20	40

শ্রেণী সীমানা	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
		নিচ থেকে	উপর থেকে
49.5	18	38	22
54.5	14	52	8
59.5	6	58	2
64.5	2	60	0
মোট	60	—	—

সারণি নং ২.১১

60 জন ছাত্রের ওজনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

ওজন (কেজিতে)	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
		নিচ থেকে	উপর থেকে
30–40	3	3	60
35–39	5	8	57
40–44	12	20	52
45–49	18	38	40
50–54	14	52	22
55–59	6	58	8
60–64	2	60	2
মোট	60	—	—

2.7 প্রতিলিপির (Diagram) সাহায্যে উপস্থাপনার সুবিধা ও অসুবিধা

যদিও শ্রেণী বিন্যাস ও ছক বিন্যাস রাশিতথ্যকে বিজ্ঞানসম্মতভাবে ও সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করে তবুও অধিকাংশ মানুষের পক্ষে স্বল্প সময়ে ও অনায়াসে উহার তাৎপর্য অনুধাবন করা সম্ভব হয়না। যদিও লেখ (Graphs) বা চার্ট (Charts) বা চিত্র কেবলমাত্র স্থূল (approximate) প্রতিলিপি তুলে ধরে, তবু এর দৃষ্টি আকর্ষণী ক্ষমতা প্রচুর। সেজন্য সংবাদপত্র, বিভিন্ন পত্র-পত্রিকা, সরকারী ও বেসরকারী সংস্থাসমূহকে পরিসংখ্যানের রাশিতথ্য অনেক

সময়েই লেখ ও চিত্রাদির দ্বারা প্রকাশ করতে দেখা যায়। লেখ ও চিত্রাদি ব্যবহারে নিম্নলিখিত কতকগুলি সুবিধা ও অসুবিধা আছে ঃ

সুবিধা :

(i) এই পদ্ধতি সাধারণ লোকের কাছে চিত্তাকর্ষক ও তথ্যবহুল।

(ii) জটিল কোনও সমস্যা অনেক সময় লেখ ও চিত্রাদি দ্বারা সহজবোধ্য হয়।

(iii) ইহার দ্বারা বিভিন্ন রাশিতথ্যমালার তুলনা করা খুব সহজ হয়।

(iv) মানের পরিবর্তনের হার লেখ ও চিত্রাদি থেকে সহজবোধ্য হয়।

(v) ইহা চলকের অন্তঃমান (interpolation) নির্ণয়ে সাহায্য করে।

(vi) রাশিতথ্যমালার বিশেষ কোনও প্রবণতা (trend) থাকলে বুঝতে সুবিধা হয়।

(vii) লেখ ও চিত্রাদির সাহায্যে সংগৃহীত রাশিতথ্যের মধ্যে কোনও ত্রুটি থাকলে তা দৃষ্টিগোচর হয়।

অসুবিধা :

(i) ছকের সাহায্যে প্রকাশিত রাশিতথ্যে চলকের সঠিক মান পাওয়া যায়। কিন্তু লেখ বা চিত্রাদির মাধ্যমে প্রকাশিত তথ্যে চলকের সঠিক মান পাওয়া সম্ভব নয়।

(ii) ইহার দ্বারা প্রকাশিত রাশিতথ্যে বিস্তৃত বিবরণ থাকে না।

(iii) ইহা তৈরি করতে যথেষ্ট সময় ও সাবধানতার প্রয়োজন। অন্যথায় ভুল সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার সম্ভাবনা থাকে।

(iv) ইহা কখনও কখনও সাধারণ মানুষকে ভুল পথে পরিচালিত করতে পারে।

2.8 বিভিন্ন ধরনের লেখচিত্র

বিভিন্ন ধরনের লেখচিত্রগুলি হল :

(i) রেখাচিত্র (Line Chart) বা লেখ (Graph)

(ii) বারচিত্র বা দণ্ডচিত্র (Bar Chart)

(iii) আনুপাতিক চিত্র বা সেমি লগারিদ্‌ম্‌ লেখচিত্র (Ratio Chart OR Semi-Logarithmic Graph)

(iv) পাই চিত্র (Pie Chart or Pie Graph)

(v) আয়তলেখ (Histogram)

(vi) পরিসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygen)

(vii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (Ogive or Cumulative Frequency Curve)

(viii) পরিসংখ্যা দণ্ড লেখ (Column Diagram)

(ix) ধাপচিত্র (Step Diagram)

(i) রেখাচিত্র (Line Chart) বা লেখ (Graph) :

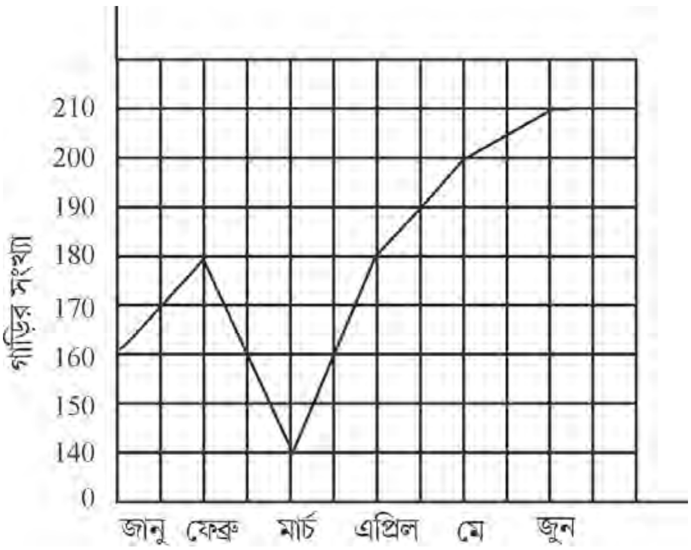
এই ধরনের লেখাচিত্রে X-অক্ষ বরাবর স্বাধীন চলকের (independent variable) এবং অধীন চলকের (dependent variable) Y-অক্ষ বরাবর বিন্দুগুলি স্থাপন করা হয়। এইভাবে যে বিন্দুগুলি লেখ-তে পাওয়া যায় সেগুলিকে পর্যায়ক্রমে (successively) সরলরেখা দ্বারা যোগ করলে যে চিত্র পাওয়া যায় তাকে রেখাচিত্র বা লেখ বলে।

কোনও কালীন সারির লেখিক প্রকাশকে হিস্টোরিগ্রাম (Historigram) বা কালীন লেখ বলে।

উদাহরণ : ১. কোন সংস্থার প্রথম ছয় মাসের মাসিক গাড়ির উৎপাদন নিচে দেওয়া হল। একটি রেখাচিত্রের সাহায্যে তথ্যগুলিকে উপস্থাপন করুন।

মাস	জানুয়ারি	ফেব্রুয়ারি	মার্চ	এপ্রিল	মে	জুন
গাড়ির সংখ্যা	160	180	140	180	200	210

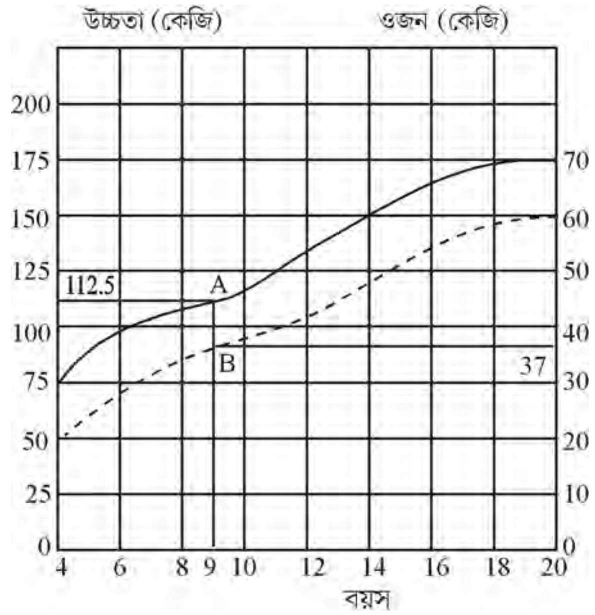
সমাধান :



উদাহরণ : ২. নিচের ছকে একজন লোকের বিভিন্ন বয়সে উচ্চতা ও ওজন দেওয়া আছে।

বয়স (বছর)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
উচ্চতা (সেমি)	75	90	105	125	140	150	175	185	195
ওজন (কেজি)	20	25	35	40	45	55	60	65	70

দুটি রেখাচিত্র অঙ্কন কর ছকের তথ্য থেকে এবং লোকের উচ্চতা ও ওজনকে অবিচ্ছিন্ন চলক মনে করে লেখচিত্র অন্তঃমান নির্ণয় পদ্ধতিতে ঐ ব্যক্তির 9 বছর বয়সে উচ্চতা ও ওজন কত ছিল নির্ণয় করুন।



উচ্চতার রেখাচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, 9 বছর বয়সে একজনের উচ্চতা আনুমানিক 112.5 সেমি (A-চিহ্নিত স্থান) এবং ওজন 37 কেজি (B-চিহ্নিত স্থান) ছিল।

(ii) বারচিত্র বা দণ্ড চিত্র :

দণ্ডচিত্র বা বারচিত্র পরিসংখ্যান-বিষয়ক রাশিতথ্যের প্রকাশের আর একটি বহুল-ব্যবহৃত পদ্ধতি। দণ্ডচিত্র বা বারচিত্র হল কতকগুলি সমান প্রস্থের ও পরস্পর হতে সমান দূরত্বে অবস্থিত আয়তাকার বার বা দণ্ড। কোনও একটি বারের দৈর্ঘ্য উহা যে রাশিতথ্যের মানকে প্রকাশ করে, তার সঙ্গে সমানুপাতিত করে ঠিক করা হয়। বার বা দণ্ডগুলি উল্লম্বভাবে কোনও অনুভূমিক রেখার উপর অথবা অনুভূমিকভাবে কোনও উল্লম্ব রেখার উপর পরপর থাকতে পারে। প্রথমে উল্লেখিত বারচিত্রকে উল্লম্ব বারচিত্র (Vertical Bar Chart or Column Chart) এবং পরবর্তী ক্ষেত্রে বারচিত্রকে অনুভূমিক বারচিত্র (Horizontal Bar Chart) বলে। কালীন সারির ক্ষেত্রে উল্লম্ব বারচিত্র ব্যবহার করা হয়।

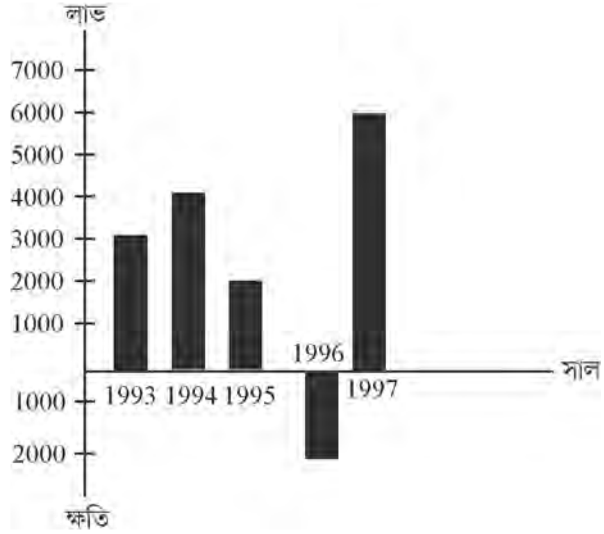
পরপর দু'টি বারের মধ্যে কতখানি ফাঁকা জায়গা থাকবে তার কোনও বাঁধা ধরা নিয়ম নেই। তবে দরকার মতো উক্ত স্থান একটি বারের প্রস্থ বা প্রস্থের অর্ধেকের সমান হতে পারে।

উল্লেখিত প্রত্যেকবার বা দণ্ডচিত্রের জন্য বহুল বারচিত্র (Multiple or Compound Bar Chart) তৈরি করা যায়। জটিল বারচিত্রে পরস্পর সম্পর্কিত দুই বা ততোধিক রাশিতথ্য উপস্থাপন করা হয়। বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্রে একটি বার বা দণ্ডকে বহু অংশে বিভক্ত করে রাশিতথ্যমালার বিভিন্ন অংশ প্রকাশ করা হয়। রাশিতথ্যের এইরূপ উপস্থাপনে তাদের পরস্পরের মধ্যে সম্পর্ক এবং সমগ্র রাশিতথ্যের সঙ্গে তাদের বিভিন্ন অংশের সম্পর্ক সুস্পষ্টভাবে প্রকাশ করা হয়। উদাহরণের সাহায্যে সমস্ত বার বা দণ্ড চিত্র দেখানো হল।

উদাহরণ ৩. একটি ব্যবসায়ী সংস্থার 1993-1997 সালের লাভ-ক্ষতি নিচে দেওয়া হল। তথ্যগুলিকে বার বা দণ্ড চিত্রে উপস্থাপন করুন।

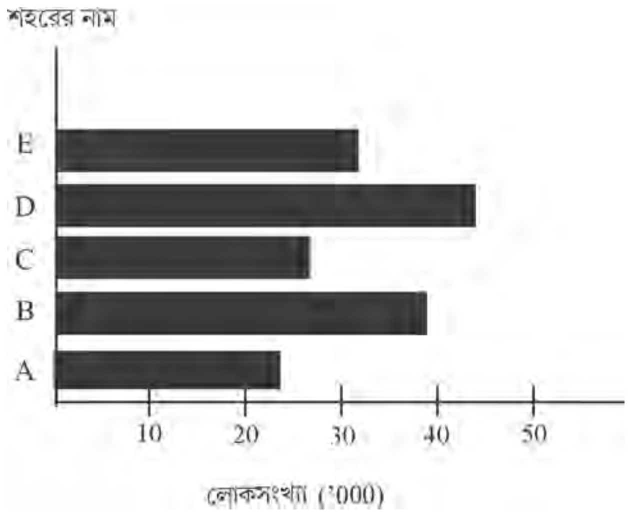
সাল	1993	1994	1995	1996	1997
লাভ (টাকায়)	3000	4000	2500	—	6000
ক্ষতি (টাকায়)	—	—	—	2000	—

সমাধান :



উদাহরণ ৪. 5টি বিভিন্ন শহরের অধিবাসী সংখ্যা উপস্থাপন করার জন্য একটি বার বা দণ্ড চিত্র অঙ্কন করুন।

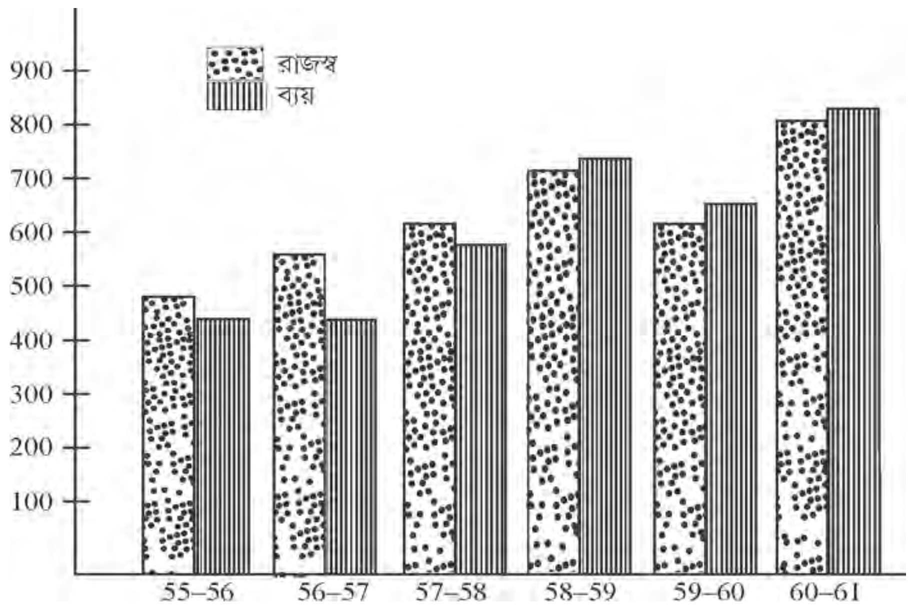
শহরের নাম	A	B	C	D	E
লোকসংখ্যা ('000)	22	40	25	42	30



উদাহরণ ৫. কেন্দ্রীয় সরকারের 1955-61 সালের রাজস্ব ও ব্যয়ের প্রবণতা নিচের ছকে দেওয়া হল। জটিল বার বা দণ্ড চিত্র অঙ্কন করুন।

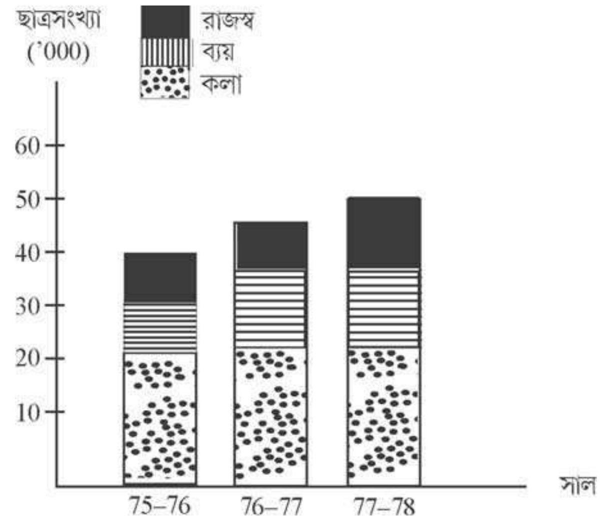
সাল	1955-56	1956-57	1957-58	1958-59	1959-60	1960-61
রাজস্ব (কোটিতে)	480	560	680	740	670	820
ব্যয় (কোটিতে)	440	470	630	760	680	830

সমাধান :



উদাহরণ ৬. 1975-78 সালে কোন একটি বিশ্ববিদ্যালয়ে ছাত্রসংখ্যা নিম্নরূপ ছিল। রাশিতথ্যকে বহু অংশে বিভক্ত বার বা দণ্ড চিত্রে উপস্থাপন করুন।

সাল	কলা বিভাগ	বিজ্ঞান বিভাগ	বাণিজ্য বিভাগ	মোট
1975-76	20,000	12,000	7,000	39,000
1976-77	24,000	15,000	10,000	49,000
1977-78	25,000	18,000	15,000	58,000



(iii) আনুমানিক চিত্র বা সেমি লগারিদ্‌ম্ লেখচিত্র :

লেখচিত্র প্রস্তুতিতে স্বাধীন চলকের মান অনুভূমিক বা X-অক্ষ বরাবর এবং অধীন চলকের মান উল্লম্ব বা Y-অক্ষ বরাবর নেওয়া হয়। এ পর্যন্ত যে সব লেখচিত্র আলোচনা করা হয়েছে তাতে অক্ষের চলক সমুহের মান স্বাভাবিক পরিমাপ মাত্রায় (Natural or Absolute Scale-এ) প্রকাশ করা হয়েছে। এইসব চিত্রে স্বাধীন চলক X-এর মানের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে অধীন চলক y-এর মানের প্রকৃত পরিবর্তন (actual change)-এর চিত্রই শুধু পাওয়া যায়। কিন্তু অধীন চলক কী হারে পরিবর্তিত হচ্ছে তা পরিমাপ করা যায় না। যে লেখ থাকে অধীন চলকের মান পরিবর্তনের হার সরাসরি নির্ণয় করা যায় তাকে সেমি লগারি্দম্ লেখচিত্র (Semi-Logarithmic Graph) বা আনুপাতিক লেখচিত্র (Ratio Chart or Graph) বলে। এই লেখচিত্র অঙ্কন করতে হলে উল্লম্ব রেখায় log y-এর মান এবং অনুভূমিক রেখায় স্বাধীন চলক x-এর স্বাভাবিক মান নেওয়া হয়। সেমি লগারিদ্‌ম্ লেখ-এর উল্লম্ব রেখায় সমান সমান দূরত্ব অধীন চলক y-এর মান সমান সমান শতকরা পরিবর্তনের হার নির্দেশ করে।

একটি উদাহরণ সহযোগে দেখা যাক। ধরা যাক, y-এর কয়েক জোড়া মান পরিবর্তন নিম্নরূপ :

(a) 100 থেকে 150, (b) 250 থেকে 300 এবং (c) 500 থেকে 550 ; স্বাভাবিক পরিমাপে প্রতিজোড়া সংখ্যার ক্ষেত্রে y-এর প্রকৃত মানের পরিবর্তন 50 একক। কিন্তু (a)-এর ক্ষেত্রে y-এর শতকরা 50 ভাগ, (b) এর ক্ষেত্রে y-এর শতকরা 20 ভাগ $\left(=\frac{100}{5}\right)$ এবং (c)-এর ক্ষেত্রে y-এর শতকরা 10 ভাগ $\left(=\frac{50\times100}{500}\right)$ বৃদ্ধি পেয়েছে।

আনুপাতিক চিত্র সরলরেখা হলে বুঝতে হবে y-এর পরিবর্তনের হার সর্বত্র সমান।

উদাহরণ ৭. বর্ষশেষে উৎপাদনের সংখ্যগত তথ্য নিম্নের সারণীতে দেওয়া হল। রাশিতথ্য সেমি লগারিদ্‌ম্ লেখচিত্র বা আনুপাতিক লেখচিত্র-এর সাহায্যে প্রকাশ করুন।

বছর	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955
উৎপাদিত এককের সংখ্যা	20	62	147	300	536	811	1104	1425	1755

সমাধান :

বছর	উৎপাদিত এক (y)	log y (আসন্ন দুই দশমিক ভাগ পর্যন্ত)
1947	20	1.32
1948	62	1.79
1949	147	2.17
1950	300	2.48
1951	536	2.73
1952	811	2.91
1953	1104	3.04
1954	1525	3.15
1955	1755	3.24

অন্যথায় সেমি লগারিদ্‌ম্ লেখ-কাগজ ব্যবহার করা যায়। এই লেখ কাগজে y-অক্ষ এমন যে, দুটি বিন্দু দূরত্ব তাদের লগারিদ্‌মের পার্থক্যের সমান। অর্থাৎ 1 এবং 10-এর দূরত্ব, 10 এবং 100-র দূরত্ব বা 100 থেকে 1000-এর দূরত্ব সমান কারণ তাদের লগারিদ্‌মের পার্থক্য সমান।

(iv) পাইচিত্র :

পাইচিত্রের সাহায্যে পরিসংখ্যান বিষয়ক রাশিতথ্য প্রকাশের বহুল প্রচলন আছে। বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্রের মতো রাশিতথ্যের বিভিন্ন অংশের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক এবং পূর্ণতথ্যের সঙ্গে বিভিন্ন অংশের পারস্পরিক সম্পর্ক সুন্দরভাবে প্রকাশের ক্ষেত্রে পাইচিত্রের ব্যবহার খুবই উপযোগী।

চিত্র তৈরির জন্য একটি যে কোনও ব্যাসার্ধের বৃত্তকে কয়েকটি অংশে ভাগ করা হয় যাদের ক্ষেত্রফল প্রদত্ত মানগুলির সমানুপাতিক হয়। আবার যেহেতু বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল কেন্দ্রস্থ কোণের সমানুপাতিক, এক কথায় বলা যায় যে, পাইচিত্র হল একটি বৃত্ত যাকে কয়েকটি ব্যাসার্ধের দ্বারা এমনভাবে কয়েকটি বৃত্তাংশে ভাগ করা হয় যাতে বৃত্তাংশগুলির কেন্দ্রস্থ কোণগুলি পূর্ণ রাশিতথ্যের বিভিন্ন অংশ তথ্য সমূহের সমানুপাতিক হয়।

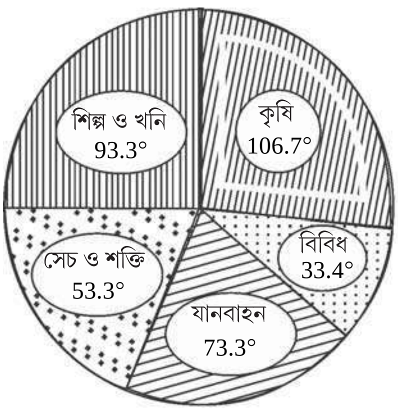
উদাহরণ ৮. নিচে কোনও সরকারের একটি পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনায় বিভিন্ন খাতের আনুমানিক ব্যয় দেখানো হয়েছে। উহাদের পাইচিত্র-এর সাহায্যে প্রকাশ করুন :

বিষয়	**টাকা (কোটিতে)**
কৃষি	8000
শিল্প ও খনি	7000
সেচ ও শক্তি	4000
যানবাহন	5500
বিবিধ	2500

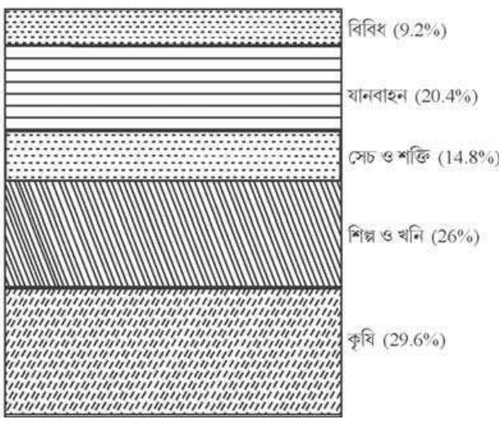
সমাধান : পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনায় মোট ব্যয় = 27000 কোটি টাকা। নিচে বিভিন্ন খাতের ব্যয়কে মোট ব্যয়ের শতকরা প্রকাশ করে অনুরূপ কেন্দ্রস্থ কোণগুলি নির্ণয় করা হল :

বিষয়	শতকরা হিসাব	কেন্দ্রস্থ কোণ
কৃষি	$\frac{8000}{27000}\times 100\% = 29.6\%$	$\frac{8000}{2700}\times 360° = 106.7°$ (প্রায়)
শিল্প ও খনি	$\frac{7000}{27000}\times 100\% = 26.0\%$	$\frac{7000}{27000}\times 360° = 93.3°$ (প্রায়)
সেচ ও শক্তি	$\frac{4000}{27000}\times 100\% = 14.8\%$	$\frac{4000}{27000}\times 360° = 53.3°$ (প্রায়)
যানবাহন	$\frac{5500}{27000}\times 100\% = 20.4\%$	$\frac{5500}{27000}\times 360° = 73.3°$ (প্রায়)
বিবিধ	$\frac{2500}{27000}\times 100\% = 9.2\%$	$\frac{2500}{27000}\times 360° = 33.4°$ (প্রায়)
মোট	100%	360°

সুবিধামতো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করে উহার কেন্দ্রের পরপর 106.7°, 93.3° ইত্যাদি কোণ অঙ্কন করে প্রদত্ত রাশিতথ্যের পাইচিত্র নিম্নরূপ :



পাইচিত্র



(v) আয়তলেখ : পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক প্রকাশের জন্য ইহা ব্যবহৃত হয়। শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের রাশিতথ্য অধিকাংশ ক্ষেত্রে আয়তলেখের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। আয়তলেখ একটি সরলরেখার উপর এমন ককতগুলি আয়তক্ষেত্র যাদের প্রতিটির ক্ষেত্রফল অনুরূপ শ্রেণী পরিসংখ্যার সঙ্গে সমানুপাতিক।

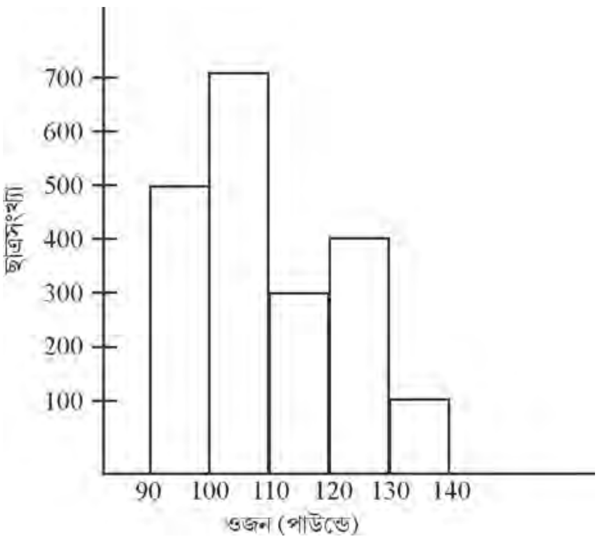
আয়তলেখ অঙ্কন করতে হলে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের শ্রেণীবিভাগগুলির শ্রেণী সীমানাগুলি (Class boundaries) অনুভূমিক রেখায় (X-অক্ষে) শ্রেণী বিভাগের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক অংশ পর পর স্থাপন করা হয়। প্রত্যেকটি অংশের উপর নির্দিষ্ট শ্রেণী বিভাগের পরিসংখ্যার সঙ্গে সমানুপাতিক করে আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করতে হয়। **এর ফলে উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অনুরূপ শ্রেণী বিভাগগুলির পরিসংখ্যাকে এবং আয়তক্ষেত্রগুলির মোট ক্ষেত্রফল মোট পরিসংখ্যাকে প্রকাশ করে।**

যদি পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রতিটি শ্রেণী দৈর্ঘ্য সমান হয়, তবে আয়তক্ষেত্রগুলির উচ্চতাগুলি অনুরূপ শ্রেণী পরিসংখ্যার সঙ্গে সমানুপাতিক করে নেওয়া হয়। যদি **শ্রেণী প্রসারগুলির দৈর্ঘ্য অসমান হয়, তবে বিভিন্ন আয়তক্ষেত্রের উচ্চতা নিম্নলিখিতভাবে স্থির করা হয় :**

উচ্চতা = শ্রেণী পরিসংখ্যা ÷ শ্রেণী প্রসারের দৈর্ঘ্য = পরিসংখ্যা ঘনত্ব।

উদাহরণ ৯. 2000 জন ছাত্রের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন নিচে দেওয়া আছে। একটি আয়তলেখ-এর সাহায্যে প্রকাশ করুন।

ওজন (পাউন্ডে)	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140
ছাত্রসংখ্যা	500	700	300	400	100



(vi) পরিসংখ্যা বহুভুজ : পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক প্রকাশ ইহার সাহায্যেও করা হয়। বেশির ভাগ সময় ইহা সমান শ্রেণীপ্রসারভুক্ত বিভাজনের ক্ষেত্রে করা হয়। এই পদ্ধতিতে প্রত্যেক শ্রেণীর পরিসংখ্যা অনুরূপ শ্রেণীর মধ্যবিন্দুর বিরুদ্ধে সংস্থাপন করা হয়। যে বিন্দুগুলি পাওয়া যায় সেগুলি পরপর সরলরেখা দিয়ে যুক্ত করা হয়।

প্রথম ও শেষ বিন্দু দুটি দু'প্রান্তে কল্পিত পরিসংখ্যাহীন শ্রেণীর মধ্যবিন্দু ধরে বহুভুজসম্পন্ন করা হয়।

আয়তলেখ থেকে পরিসংখ্যা বহুভুজ পেতে হলে, আয়তক্ষেত্রগুলির উপরের অংশের মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করে এবং পূর্বে বর্ণিত উপায়ে প্রান্তদ্বয় সম্পূর্ণ করা হয়।

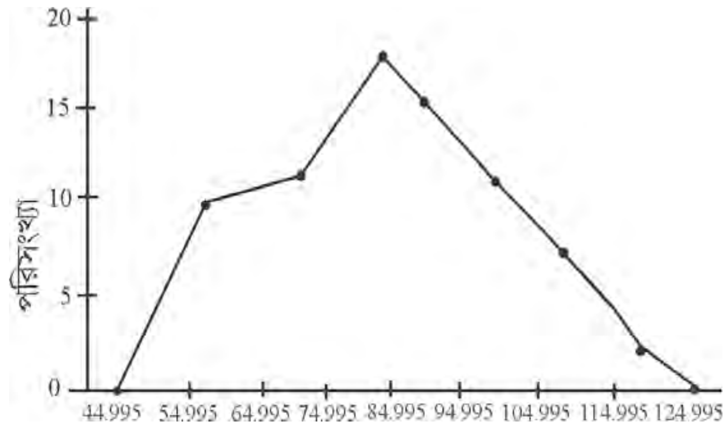
যদি পরিসংখ্যা বিভাজনে শ্রেণীপ্রসার ক্রমশ ছোট করা হয়, তবে শ্রেণীর সংখ্যা বাড়বে। ফলে বহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি খুব কাছাকাছি আসবে এবং সেক্ষেত্রে বিন্দুগুলির মধ্য দিয়ে সন্তত রেখা টানলে (smooth free hand curve) যে রেখা পাওয়া যায় তাকে পরিসংখ্যা রেখা (Frequency curve) বলে।

উদাহরণ ১০. নিচের ছকে কর্মীদের মাসিক আয় দেওয়া আছে। উহা পরিসংখ্যা বহুভুজের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

মাসিক আয় (টাকায়)	কর্মী সংখ্যা
50.00–59.99	8
60.00–69.99	10
70.00–79.99	16
80.00–89.99	14
90.00–99.99	10
100.00–109.99	5
110.00–119.99	2

সমাধান : পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কনের জন্য গণনা কার্য :

মধ্যবিন্দু	54.995	64.995	74.995	84.995	94.995	104.995	114.995
পরিসংখ্যা	8	10	18	14	10	5	2



(vii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখা : ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলির লৈখিক প্রকাশ ইহার সাহায্যে করা হয়। এই পদ্ধতিতে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি শ্রেণী সীমানাগুলির বিরুদ্ধে উপস্থাপন করে যে বিন্দুগুলি পাওয়া যায়

সেগুলি পরপর সরলরেখা দ্বারা যোগ করা হয়। ইহা দু'ধরনের—(a) নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা'-র জন্য এবং (b) উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা'-এর জন্য। নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা দেখতে বর্ধিত S-এর মতো এবং উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা উপর দিক নিচে উল্টানো বর্ধিত S-এর দেখতে। ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখার দ্বারা মধ্যমা, চতুর্থক প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়।

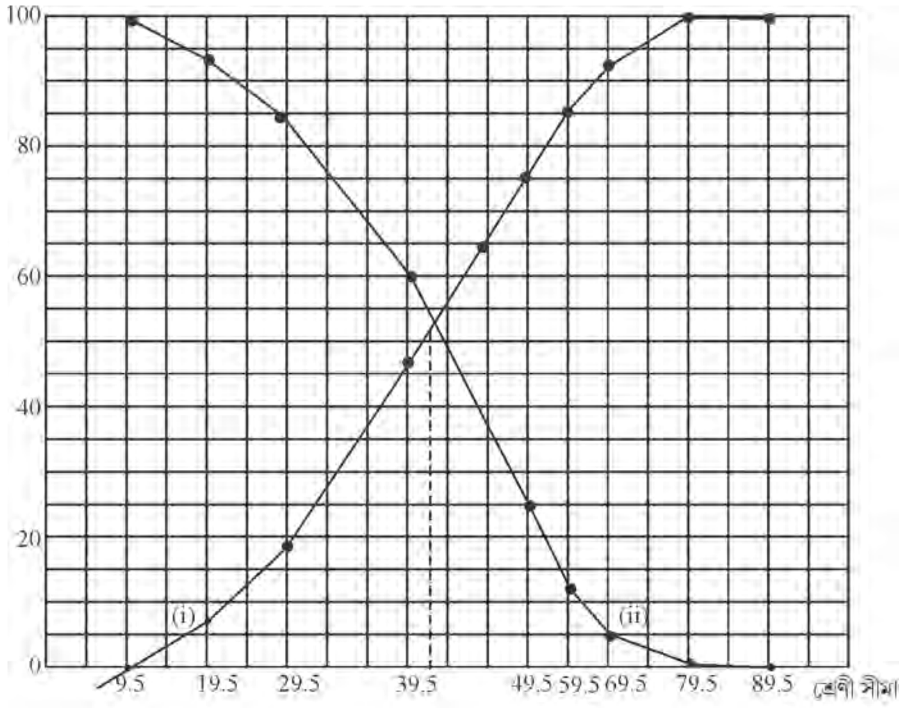
উদাহরণ ১১. নিম্নলিখিত রাশিতথ্য ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখার সাহায্যে প্রকাশ করুন (a) নিচ থেকে, (b) উপর থেকে :

100 জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন

নম্বরের শ্রেণী বিভাগ	**ছাত্রসংখ্যা**
10–19	8
20–39	14
30–39	22
40–49	29
50–59	14
60–69	7
70–79	4
80–89	2
মোট	100

সমাধান : ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখার জন্য গণনা কার্য :

নম্বরের শ্রেণীবিভাগ	**শ্রেণী সীমানা**	**পরিসংখ্যা**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা**	
			নিচ থেকে	**উপর থেকে**
10–19	9.5–19.5	8	8	100
20–29	19.5–29.5	14	22	92
30–39	29.5–39.5	22	44	78
40–49	39.5–49.5	29	73	56
50–59	49.5–59.5	14	87	27
60–69	59.5–69.5	7	94	13
70–79	69.5–79.5	4	98	6
80–89	79.5–89.5	2	100	2

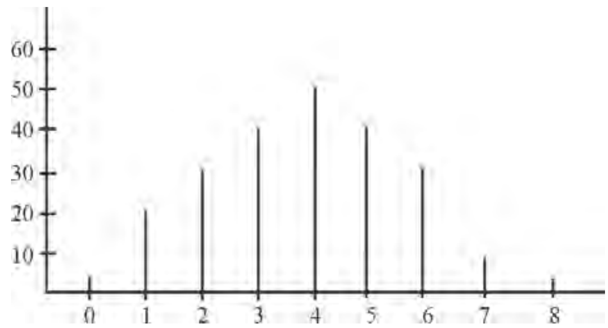


(viii) পরিসংখ্যা দণ্ড লেখ (Column diagram) : বিচ্ছিন্ন চলকের বিভিন্ন মানের জন্য যে পরিসংখ্যা বিভাজন তার উপস্থাপন ইহার দ্বারা করা হয়। খুব কম প্রসার (সূক্ষ্মরেখা)-এর বিচ্ছিন্ন উল্লম্ব দণ্ড বা বার বিভিন্ন মানের উপর দাঁড় করিয়ে ইহা আঁকা হয়, সেখানে দণ্ডগুলির উচ্চতা পরিসংখ্যার সমানুপাতিক হয়।

উদাহরণ ১২. প্রতি এক মিনিটে আগত দূরভাস সংখ্যা নিচের ছকে দেখানো হয়েছে। ইহা লেখ-এর সাহায্যে প্রকাশ করুন।

দূরভাষ সংখ্যা	0	1	2	3	4	5	6	7	8
পরিসংখ্যা	5	22	31	43	51	40	35	15	3

সমাধান :



(ix) ধাপচিত্র (Step diagram) : বিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাকে চিত্রায়িত করার জন্য ইহা ব্যবহৃত হয়।

নিচ থেকে ক্রমযৌগিক চিত্রটি দেখতে বাম থেকে ডানে ওঠা সিঁড়ির মতো, যার প্রথম ধাপের উচ্চতা প্রথম নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা, দ্বিতীয় ধাপ দ্বিতীয় নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ইত্যাদির সমানুপাতিক।

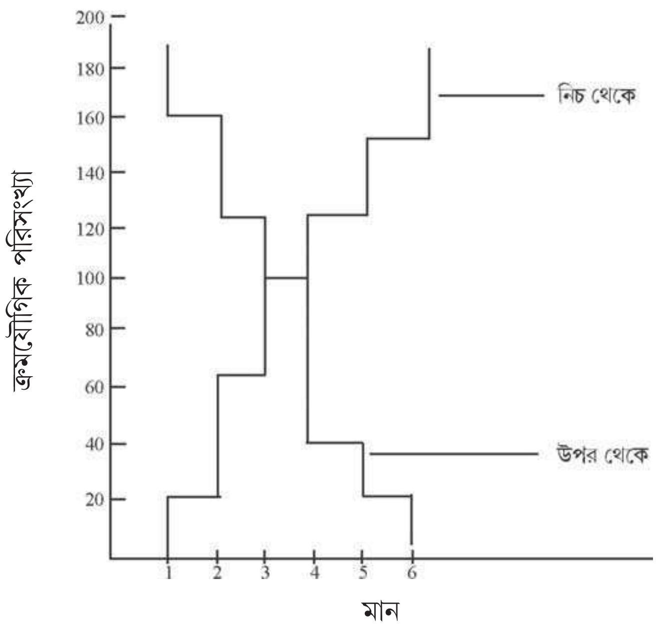
উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা চিত্রটি দেখতে ডান থেকে বামে উঠা সিঁড়ির মতো, যার প্রথম ধাপের উচ্চতা প্রথম উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা, দ্বিতীয় উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ইত্যাদির সমানুপাতিক।

উদাহরণ : ১৩. নিম্নের বিভাজন ছকের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা চিত্র (উভয় প্রকার) অঙ্কন করুন :

মান (Grade)	1	2	3	4	5	6
ছাত্রসংখ্যা	20	34	40	52	26	16

সমাধান : ধাপচিত্রের জন্য গণনা কার্য :

মান	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
		নিচ থেকে	উপর থেকে
1	20	20	188
2	34	54	168
3	40	94	134
4	52	146	94
5	26	172	42
6	16	188	16



2.9 অনুশীলনী

(১) বিচ্ছিন্ন অবিচ্ছিন্ন চলকের একটি করে উদাহরণ দিন।

(২) শ্রেণী সীমা ও শ্রেণী সীমানার পার্থক্য কী?

(৩) পরিসংখ্যা ঘনত্ব কোন্ ক্ষেত্রে অত্যাবশ্যক?

(৪) উৎস সারণীর কোন্ অংশে থাকে?

(৫) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা কত প্রকার ও কী কী?

(৬) সেমি লগারিদ্‌ম লেখচিত্র কোন্ বিশেষ ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হয়?

(৭) নিম্নোক্ত লেখচিত্রগুলি প্রয়োগের একটি করে উদাহরণ দিন।

(ক) উলম্ব ও অনুভূতির বারচিত্র।

(খ) জটিল ও বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্র।

(গ) পাইচিত্র ও বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্র।

(ঘ) দণ্ডলেখ ও আয়তলেখ।

(ঙ) ধাপচিত্র ও ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা।

(৮) পরিসংখ্যা রেখার/বহুভূজের অন্তর্গত আয়তনের মোট ক্ষেত্রফল কত?

(৯) পরিসংখ্যান বলতে কী বোঝ? পরিসংখ্যান শব্দটি কোন্ দু'টি অর্থে ব্যবহৃত হয়?

(১০) একটি পরিসংখ্যান ছকের বিভিন্ন অংশগুলি বর্ণনা করুন।

(১১) (i) সরল পরিসংখ্যান ছকের বিভাজন ও (ii) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন কাকে বলে বর্ণনা কর ও প্রত্যেকটির একটি করে উদাহরণ দিন।

(১২) একটি বিশ্ববিদ্যালয়ে কোনও বছর কলা, বিজ্ঞান ও বাণিজ্য শাখায় প্রথম বর্ষ, দ্বিতীয় বর্ষ ও তৃতীয় বর্ষের পরীক্ষায় অংশগ্রহণকারী পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা লিঙ্গভেদে প্রদর্শনের জন্য একটি খালি ছক (bank table) তৈরি করুন।

(১৩) লেখচিত্রের সাহায্যে রাশিতথ্যের উপস্থাপন বলতে কী বোঝায়? উহার সুবিধা ও অসুবিধা আলোচনা করুন।

(১৪) বার বা দণ্ড চিত্র, পাইচিত্র ও আয়তলেখ বলতে কী বোঝায়? ব্যবসাক্ষেত্রে এদের ব্যবহার উদাহরণ সহকারে বোঝান।

(১৫) পার্থক্য ব্যাখ্যা করুন :

(i) বারচিত্রও আনুপাতিক চিত্র (Bar Chart and Ratio Chart)

(ii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা ও ধাপচিত্র (Ogive and Step Diagram)

(iii) আয়তলেখ ও কালীনলেখ (Histogram and Historigram)

(১৬) ভারতে মাসিক সাইকেল উৎপাদন নিচে দেওয়া হল :

জানুয়ারী	—	5720	ফেব্রুয়ারী	—	4900	মার্চ	—	6110
এপ্রিল	—	5930	মে	—	6040	জুন	—	4610
জুলাই	—	3060	আগস্ট	—	4700	সেপ্টেম্বর	—	5605
অক্টোবর	—	3275	নভেম্বর	—	6850	ডিসেম্বর	—	6130

উপরের তথ্য উপস্থাপন কর (a) রেখচিত্র (Line Chart) এবং (b) বারচিত্র (Bar Chart)-এর সাহায্যে।

(১৭) বহুল বারচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রাশিতথ্য প্রকাশ কর :

বছর	1975	1976	1977	1978	1979
কারখানা A-তে উৎপাদন	300	326	180	275	320
কারখানা B-তে উৎপাদন	260	310	250	250	270

(১৮) নিম্নলিখিত দু'মাসের খরচের রাশিতথ্যকে বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্রে ও পাইচিত্রে প্রকাশ করুন :

	জানুয়ারি	**ফেব্রুয়ারি**
কাঁচামালা	700	600
শ্রমিক	800	700
উৎপাদন	100	70
বিবিধ	200	300
মোট	1800	1670

(১৯) নিম্নলিখিত তথ্য একটি বারচিত্রে প্রকাশ কর :

শহর	A	B	C	D	E
জনসংখ্যা (হাজারে)	20.2	17.1	13.8	12.0	18.8

(২০) নিম্নলিখিত তথ্য (i) আয়তলেখ, (ii) পরিসংখ্যা বহুভুজ ও (iii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা দিয়ে প্রকাশ করুন :

শ্রমিকদের দৈনিক আয়

দৈনিক আয় (টাকায়)	**শ্রমিক সংখ্যা**
30–32	4
33–35	7
36–38	16
39–41	31
42–44	60
45–47	11
48–50	1

(২১) নিম্নলিখিত তথ্যকে (i) পরিসংখ্যা বারচিত্র ও (iii) ধাপচিত্র-এর সাহায্যে প্রকাশ করুন :

দৈনিক যান দুর্ঘটনা সংখ্যা	দিনসংখ্যা
2	4
3	7
4	13
5	3
6	2
7	1
মোট	30

একক 3 ❑ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ (Measure of Central Tendency)

গঠন

3.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়বার পর আপনি জানতে পারবেন—

- কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের প্রকারভেদ কী কী
- যৌগিক গড় ও তার ধর্মসমূহ কী কী
- গুণোত্তর গড় কাকে বলে এবং বিভিন্ন প্রকার গড়ের পারস্পরিক সম্পর্ক কীরকম
- মধ্যমা ও সংখ্যাগুরুমান কাকে বলে?

3.1 প্রস্তাবনা

পরিসংখ্যান বিষয়ক যে কোনও তথ্যানুসন্ধানে বিস্তৃত ও ব্যাপক রাশিতথ্যমালার শ্রেণীবিন্যাস, ছেদবিন্যাস বা পরিসংখ্যা বিভাজনের সাহায্যে সংক্ষিপ্তকরণ করা যায়। রাশিতথ্যমালার প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্যসমূহ বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে উল্লিখিত সংক্ষিপ্ত করণ যথেষ্ট নয়। যেমন, এক লক্ষ ভারতীয়'র আয়ের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে ভারতীয়দের আয় সম্পর্কে কোনও ধারণা করা যায় না। কিন্তু কেবলমাত্র একটি মান, গড় আয়, সমস্ত সমগ্রক (Population)-এর প্রতিভু (representative) হিসাবে কাজ করে যা সহজবোধ্য ও মনে রাখা যায়। সুতরাং, প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্য সমূহের যথার্থ বিশ্লেষণের জন্য উহাদের সংখ্যার মাধ্যমে সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করা প্রয়োজন বা অন্য কথায় বলা যায়, বৈশিষ্ট্যসমূহের সংখ্যাগত পরিমাপ (Quantitative measure) জানা প্রয়োজন। এরকম পরিমাপ রাশিতথ্যমালার অন্তর্নিহিত তাৎপর্য অনুধাবনে অথবা বিভিন্ন রকম তুলনামূলক সিদ্ধান্ত গ্রহণে সাহায্য করে।

অধিকাংশ পরিসংখ্যা বিভাজন ছক পর্যবেক্ষণ করে দেখা যায় যে, উহার কেন্দ্রীয় মানসমূহের পরিসংখ্যা সাধারণত প্রান্তীয় মানবসমূহের পরিসংখ্যার চেয়ে বেশি হয়। তাহলে একথা বলা যায় যে, কোনও পরিসংখ্যা বিভাজনে রাশিতথ্যমালার মানসমূহ একটি কেন্দ্রীয় মানের চতুর্দিকে বিস্তৃত থাকে, —এটা পরিসংখ্যা বিভাজনের একটি বৈশিষ্ট্য। যে কেন্দ্রীয় মানের চতুর্দিকে রাশিতথ্যমালার মানসমূহ বিস্তৃত থাকে, তাহার সংখ্যাগত পরিমাপকে রাশিবিজ্ঞানে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ (Measure of Centre Tendency) বলে। এই জাতীয় একটি বৈশিষ্ট্যের পরিমাপক সংখ্যাকে পরিসংখ্যান গড় (Statistical Average) বা শুধু গড় (Average) বলা হয়।

3.2 কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের প্রকারভেদ

যে কোনও পরিসংখ্যা বিভাজন সারণীতে রাশিতথ্যমালার মানসমূহ যে কেন্দ্রীয় মানের চতুর্দিকে বিস্তৃত থাকে তার সংখ্যাগত পরিমাপকে (Quantitative Measure-কে) রাশিবিজ্ঞানে গড় বলা হয়। তাই এক কথায়, গড় হল একটি একক সংখ্যা যা একজাতীয় কতকগুলি সংখ্যার প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্যকে প্রকাশ করে। এই হিসাবে গড়কে ঐ সংখ্যাশ্রেণীর প্রতিভু বলে মনে করা হয়।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি ভাল পরিমাপককে নিম্নলিখিত গুণাবলী বিশিষ্ট হতে হবে :

(i) এটি সহজসাধ্য হবে।

(ii) এটি সহজে মাপা যাবে।

(iii) এর মান নিরূপণে রাশিতথ্যমালার প্রত্যেকটি মান ব্যবহৃত হবে।

(iv) এর মাপন দ্ব্যর্থহীন হবে।

(v) অতিরিক্ত বীজগাণিতিক গণনা কার্যে এর ব্যবহার খুব সুবিধাজনক হবে।

(vi) এটি প্রান্তীয় মানসমূহের দ্বারা অযথা প্রভাবিত হবে না।

প্রকারভেদে কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপক তিন প্রকার :

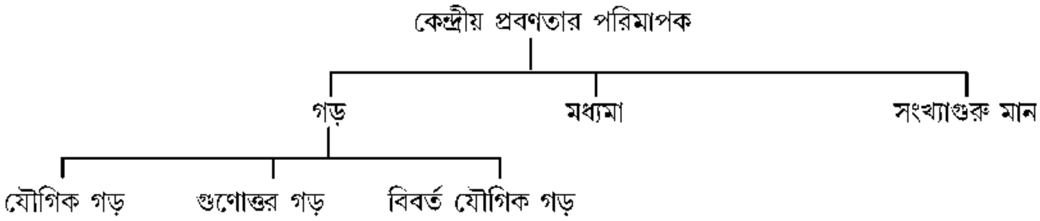
(ক) গড় (Mean), (খ) মধ্যমা (Median), এবং (গ) **সংখ্যাগুরু মান বা ভূরিষ্ঠক** (Mode)

গড় আবার তিন প্রকার :

(i) যৌগিক গড় (Arithmetic Mean or A.M)

(ii) গুণোত্তর গড় (Geometric Mean or G.M)

(iii) বিবর্ত যৌগিক গড় (Harmonic Mean or H.M)



3.3 যৌগিক গড়

তিনপ্রকার মধ্যকের মধ্যে যৌগিক গড়ের ব্যবহার সর্বাধিক। সাধারণভাবে মধ্যক বলতে যৌগিক গড়কে বোঝায়। পরিসংখ্যান শাস্ত্রে এর গুরুত্ব অপরিসীম।

3.3.1 যৌগিক গড়ের সংজ্ঞা (Definition of A. M)

সমজাতীয় কতকগুলি রাশির যৌগিক গড় রাশিগুলির কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা এবং এর মান রাশিগুলির সমষ্টিকে রাশিগুলির মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্তফলের সমান।

যদি n-সংখ্যক সমজাতীয় রাশি x_1, x_2, ... x_n-এর যৌগিক গড় $\overline{X}$ হয়, তবে

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots\dots\dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n} = \frac{\sum x}{n} \quad .....(1)$$

উদাহরণ : ১. 10 জন শ্রমিকের মাসিক আয় যথাক্রমে 2500 টাকা, 2700 টাকা, 2400 টাকা, 2300 টাকা, 2550 টাকা, 2650 টাকা, 2750 টাকা, 2450 টাকা, 2600 টাকা, 2400 টাকা। উহাদের গড় মাসিক আয় কত?

সমাধান : মোট আয় = (2500 + 2700 + 2400 + 23000 + 2550 + 2650 + 2750 + 2450 + 2600+ 2400) টাকা

= 25300 টাকা।

রাশির সংখ্যা = 10

$\therefore$ নির্ণেয় গড় মাসিক আয় = $\frac{25300}{10}$ = 2530 টাকা।

উপরোক্ত সূত্র বা উদাহরণে যে যৌগিক গড়ের কথা বলা হয়েছে, তাকে সরল যৌগিক গড় (Simple A.M.) বলে। যদি চলরাশি (x)-এর মানসমূহ গুরুত্বের দিক দিয়ে ভিন্ন হয়, তবে মানসমূহের আপেক্ষিক গুরুত্ব (relative Importanec) সাধারণত পরিসংখ্যা দ্বারা নির্ণয় করা হয়।

মনে কর, চলরাশি x-এর n সংখ্যার মান x_1, x_2, ... x_n-এর পরিসংখ্যা যথাক্রমে f_1, f_2....... f_n এবং চলকে যৌগিক গড় $\overline{X}$ হইলে,

$$\overline{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{\sum fx}{\sum f} \qquad ... (2)$$

এইরূপ গড়কে x_1, x_2, ... , x_n মানবসমূহের ভারযুক্ত যৌগিক গড় (Weighted A.M.) বলে।

যদি চলকের মানসমূহের পরিসংখ্যাগুলি পরস্পর সমান হয়, তবে ভারযুক্ত যৌগিক গড়ের মান সরল যৌগিক গড়ের মানের সঙ্গে সমান থাকে।

উদাহরণ ২. নিম্নলিখিত ছক থেকে গড় দূরভাষা বার্তা (Telephone Call)-এর সংখ্যা নির্ণয় করুন।

দূরভাষ বার্তা সংখ্যা (x)	**পরিসংখ্যা** (f)
0	4
1	10
2	13
3	21
4	23
5	21
6	17
7	10
8	1
মোট	120

সমাধান : গড় দূরভাষ বার্তা সংখ্যা $\overline{x}$ হলে,

$$\overline{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{0\times4 + 1\times10 + 2\times13 + 3\times21 + 4\times23 + 5\times21 + 6\times17 + 7\times10 + 8\times1}{120}$$

$$= \frac{476}{120} = 3.967$$

3.3.2 যৌগিক গড়ের গুরুত্বপূর্ণ ধর্মসমূহ (Important properties of A. M)

(1) কোন চলকের উহাদের যৌগিক গড় হইতে পার্থক্যের বীজগাণিতিক (Algebraic) সমষ্টির মান শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$ বা,

$\sum f_i(x_i - \bar{x}) = 0$

প্রমাণ : (i) সরল যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে :

মনে কর, $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ এই সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় $\bar{x}$ ।

$\therefore \ \bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_2}{n}$

বা, $x_1, x_2 + \ldots\ldots\ldots, x_n = \mathbf{nx}$

এখন, $\sum(x_i - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \ldots\ldots + (x_n - \bar{x})$

$= \sum(x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots x_n) - n\bar{x}$

$= n\bar{x} - n\bar{x}$

$= 0$

ভারযুক্ত যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে :

মনে কর $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_k$ রাশিগুলির ভার বা পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots f_k$ এবং উহাদের যৌগিক গড় $\bar{x}$:

$\therefore \ \bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_k}$

বা, $n\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_kx_k$ [$n = \mathbf{f_1} + \mathbf{f_2} + \ldots\ldots + \mathbf{f_k}$ ধরি]

এখন, $\sum f_i(x_i - \bar{x}) = f_1(x_1 - \bar{x}) + f_2(x_2 - \bar{x}) + \ldots\ldots f_k(x_k - \bar{x})$

$= (f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_kx_k) - \bar{x}(f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_k)$

$= n\bar{x} - n\bar{x}$

$= 0$

(2) যদি কোনও চলকের সমস্ত মানসমূহ সমান হয়, তবে উহাদের গড় ঐ মানের সঙ্গে সমান হবে।

প্রমাণ : সরল যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে : ধরা যাক চলক x-এর সমস্ত মান সমান ও উহা a

তাহলে $\sum_{i=1}^{n} x_i = na$ এবং $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{na}{n} = a$

(3) যদি y = a + bx, x -এর একটি সরলরৈখিক অপেক্ষক, তবে চলকদ্বয় y ও x-এর যৌগিক গড়ের মধ্যে একটি সম্পর্ক বর্তমান থাকবে।

প্রমাণ : (i) y = a + bx

চলক x-এর মান x_i-এর জন্য চলক y-এর মান $y_i = a + bx_i$ হবে, i = 1, 2.........., n

এখন, $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i)}{n} = \frac{a\sum_{i=1}^{n} f_i + b\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}$

$= a + b\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}$ [যেহেতু $n = \sum_{i=1}^{n} f_i$]

$= a + b\overline{x}$

(4) যদি $x_1, x_2, ..., x_{n_1}$ এই n_1 সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় $\overline{x}$ $y_1, y_2 .... y_{n_2}$ এই n_2 সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় $\overline{y}$ হয়, তবে $x_1, x_2, ... , x_{n_1}, y_1, y_2 .... y_{n_2}$ এই $(n_1 + n_2)$ সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় হবে $\frac{n_1\overline{x} + n_2\overline{y}}{n_1 + n_2}$

প্রমাণ : ধরা যাক $x_1, x_2, ... x_{n_1}, y_1, y_2, ... y_{n_2}$ এই $(n_1 + n_2)$ সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় Z.

$$\therefore Z = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n_1} + y_1 + y_2 + ...y_{n_2}}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{\sum x_i + \sum y_i}{n_1 + n_2}$$

প্রশ্নানুযায়ী, $\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n_1}$ বা, $\sum x_i = n_1\overline{x}$

এবং $\overline{y}=\frac{\sum y_i}{n_2}$ বা $\sum y_i = n_2\overline{y}$

$$\therefore z=\frac{\sum x_i+\sum y_i}{n_1+n_2}=\frac{n_1\overline{x}+n_2\overline{y}}{n_1+n_2}$$

[অনুরূপভাবে ইহা ভারযুক্ত গড়ের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য]

সাধারণভাবে, যদি চলক x-এর t সেট মান থাকে এবং মানগুলির সংখ্যা n_1, n_2 ....n_t এবং যৌগিক গড় যথাক্রমে $\overline{x}_1,\overline{x}_2,............\overline{x}_t$ হয়, তবে একই সঙ্গে সমস্ত মানের যৌগিক গড় হবে,

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{t} n_i\overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{t} n_i}$$

(5) যদি দুটি চলক x ও y এর প্রত্যেকের n-টি করে মান থাকে এবং একটি নতুন চালক z = ax + by তৈরি করা হয়, তবে যৌগিক গড়ত্রয় $\overline{x}, \overline{y}$ ও $\overline{z}$-এর ক্ষেত্রে সম্পর্ক হবে $\overline{z}=a\overline{x}+b\overline{y}$

প্রমাণ : যদি চলক ত্রয়ের মান x_i, y_i ও z_i ; i = 1, 2,.......... n হয় তবে, $z_i = ax_i + by_i$

তাহলে, $\sum z_i = a\sum x_i + b\sum y_i$

বা, $\frac{\sum z_i}{n}=a\cdot\frac{\sum x_i}{n}+b\cdot\frac{\sum y_i}{n}$

বা, $\overline{x}=a\overline{x}+b\overline{y}$

[অনুরূপভাবে ইহা ভারযুক্ত গড়ের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য]

3.3.3 সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় (Determination of A. M. by shortcut method)

(i) সরল যৌগিক গড় নির্ণয় :

ধরা যাক, n সংখ্যক রাশি x_1, x_2, ..., x_n এর যৌগিক গড় $\overline{x}$ । প্রদত্ত রাশিগুলির মানসমূহ পর্যবেক্ষণ করে কোনও একটি রাশিকে (ধরা যাক A, যার মান প্রদত্ত রাশিগুলির ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মানের মাঝামাঝি হবে এবং সুবিধামতো আন্দাজ করা যাবে) উহাদের কাল্পনিক গড় হিসাবে ধর। যদি l_1, l_2 .....l_n যথাক্রমে x_1, x_2, ... x_n-এর উহাদের কাল্পনিক গড় থেকে পার্থক্য হয়, তবে

$$\overline{x} = A + \frac{\sum \ell_i}{n} \quad \text{... (3)}$$

$= A + \overline{\ell}$ হবে

প্রমাণ : প্রশ্নানুযায়ী, $\ell_1 = x_1 - A, \ell_2 = x_2 - A$ .... $\ell_n = x_n - A$

সুতরাং, $x_1 = \ell_1 + A$, $x_2 = \ell_2 + A$............ , $x_n = \ell_n + A$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 .... + x_n}{n}$$

$$= \frac{(\ell_1 + A) + (\ell_2 + A) + ... + (\ell_n + A)}{n}$$

$$= \frac{(\ell_1 + \ell_2 + ... + \ell_n) + nA}{n} = A + \frac{\sum \ell_i}{n} = A + \overline{\ell}$$

উদাহরণ ৩. 25, 29, 33, 37, 41, 48 সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় নির্ণয় করান।

সমাধান : ধরা যাক, সংখ্যাগুলির কল্পিত গড়, A = 35

এখন সংখ্যাগুলির কল্পিত গড় থেকে পার্থক্য যথাক্রমে $\ell_1 = 25 - 35 = -10$, $\ell_2 = 29 - 35 = -6$

$\ell_3 = 33 - 35 = -2$, $\ell_4 = 37 - 35 = 2$, $\ell_5 = 41 - 35 = 6$, $\ell_6 = 48 - 35 = 13$

$\therefore$ সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় $\overline{x}$ হলে

$$\overline{x} = A + \frac{\sum \ell_i}{n}$$

$$= 35 + \frac{-10 - 6 - 2 + 2 + 6 + 13}{6}$$

$$= 35 + \frac{3}{6} = 35 + 0.5 = 35.5$$

(ii) ভারযুক্ত যৌগিক গড় নির্ণয় :

ধরা যাক, n সংখ্যক চলকের মান যথাক্রমে $x_1, x_2 ....., x_n$ এবং উহাদের পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2 ....f_n$। কোনও একটি রাশিকে (ধরা যাক, A) উহাদের কল্পিত গড় হিসাবে ধরুন। যদি $\ell_1, \ell_2, ... \ell_n$ যথাক্রমে x_1, x_2, ... x_n-এর তাদের কল্পিত গড় থেকে পার্থক্য হয়, তবে

$$\overline{x} = A + \frac{\sum f_i \ell_i}{n} \quad \text{.... (4)}$$

$= A + \overline{\ell}$ হবে।

এখানে $\overline{x}$ হল চলকের মানগুলির নির্ণেয় যৌগিক গড় এবং $n = \sum f_i$

প্রমাণ : প্রশ্নানুযায়ী $\ell_1 = x_1 - A$, $\ell_1 = x_2 - A$,............. $\ell_n = x_n - A$

সুতরাং $x_1 = \ell_1 + A$, $x_2 = \ell_2 + A$, ... $x_n = \ell_n + A$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n}{n}$$

$$= \frac{f_1(\ell_1 - A) + f_2(\ell_2 - A) + ... + f_n(\ell_n + A)}{n}$$

$$= \frac{f_1\ell_1 + f_2\ell_2 + ... + f_n\ell_n + A(f_1 + f_2 + ... + f_n)}{n}$$

$$= A + \frac{\sum f_i\ell_i}{n}$$

$$= A + \overline{\ell} \qquad \left(\because \sum_{i=1}^{n} f_i = n\right)$$

উদাহরণ ৪. সূত্র প্রয়োগে উদাহরণ ২-এর যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

দূরভাষ বার্তা সংখ্যা (a)	**পরিসংখ্যা (f)**	**কাল্পনিক গড় (A = 4) থেকে পার্থক্য** $\ell = x - A$	**f** ℓ
0	4	– 4	– 16
1	10	– 3	– 30
2	13	– 2	– 26
3	21	– 1	– 21
4	23	0	0
5	21	1	21
6	17	2	34
7	10	3	30
8	1	4	4
মোট	N = 120		$\sum f_i\ell_i = -4$

রাশিতথ্যের যৌগিক গড় $\overline{x}$ হলে,

$$\overline{x} = A + \frac{\sum f_i\ell_i}{n} = 4 - \frac{4}{20} = 4 - 0.033 = 3.967$$

3.3.4 শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের যৌগিক গড় নির্ণয় (Determination of A. M. from Grouped Frequency Distribution)

শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে চলকে যৌগিক গড় নির্ণয় ভারযুক্ত যৌগিক গড় নির্ণয় পদ্ধতিতে করা যায়। এক্ষেত্রে ধরা হয় যে, একটি শ্রেণী বিভাগের মধ্যে চলকের প্রতিটি মানই ঐ শ্রেণী বিভাগের মধ্যবিন্দুর (Mid-point) মানের সঙ্গে সমান। তাহলে শ্রেণী বিভাগের অন্তর্গত পরিসংখ্যাকে উক্ত মধ্যমানের ভার হিসাবে ধারে পূর্বে বর্ণিত প্রক্রিয়ার সাহায্যে যৌগিক গড় নির্ণয় করা হয়। এই নিয়ম সমান বা অসমান উভয় শ্রেণী দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

তাহলে, শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন ছক চলকের যৌগিক গড় (2) বা (5) সূত্র প্রয়োগ করে নির্ণয় করা যাবে। বিশেষ করে, পরিসংখ্যা বিভাজনকে শ্রেণী বিভাগগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান (equal width) হয়, তবে নিম্নলিখিত সূত্র প্রয়োগ করে, সহজে যৌগিক গড় নির্ণয় করা যায়।

$$\overline{x} = A + \frac{\sum f_i \ell_i}{n} \times c \quad \ldots\ldots (5)$$

$$= A + c.\overline{\ell}$$

যেখানে, $\overline{x}$ = চলকের যৌগিক গড়

$n = \sum f_i$ = মোট পরিসংখ্যা

$$\ell_i = \frac{x_i + A}{c}$$

x_i = i-শ্রেণী বিভাগের মধ্যমান ; i = 1, 2,......k

A = কাল্পনিক গড়

c = শ্রেণীবিভাগের দৈর্ঘ্য।

f_i = i-শ্রেণী বিভাগের পরিসংখ্যা।

প্রমাণ :

$$\ell_i = \frac{x_i + A}{c}$$

বা, $x_i = A + c.\ell_i$

বা, $f_i x_i = A f_i + c f_i \ell_i$

বা, $\sum f_i x_i = A \sum f_i + c \sum f_i \ell_i$

বা, $\dfrac{\sum f_i x_i}{n} = A \dfrac{\sum f_i}{n} + c.\dfrac{\sum f_i \ell_i}{n}$

বা, $\overline{x} = A + c\frac{\sum f_i \ell_i}{n} = A + c.\overline{\ell}$

উদাহরণ ৫. সূত্র (2) , (4) ও (5) প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

একটি শিল্পাঞ্চলে কারখানাগুলির মাসিক বিক্রয়ের পরিসংখ্যা বিভাজন :

মাসিক বিক্রয় (হাজার টাকায়)	কারখানা সংখ্যা
300 – 350	5
350 – 400	14
400 – 450	23
450 – 500	50
500 – 550	52
550 – 600	25
600 – 650	22
650 – 700	7
700 – 750	2

সমাধান :

সূত্র (2) প্রয়োগ করে প্রদত্ত রাশিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় নির্ণয় :

গণনা কার্য :

মাসিক বিক্রয়ের শ্রেণিবিভাগ (হাজার টাকায়)	মধ্যমান (x)	কারখানা সংখ্যা (f)	fx
300 – 350	325	5	1625
350 – 400	375	14	5250
400 – 450	425	23	9775
450 – 500	475	50	23750
500 – 550	535	52	27300
550 – 600	575	25	14375
600 – 650	625	22	13750
650 – 700	675	7	4725
700 – 750	725	2	1450
মোট	—	n = 200	$\sum f_i x_i = 102000$

সুতরাং, কারখানাগুলির মাসিক বিক্রয়ের যৌগিক গড় $\overline{x}$ হলে,

$\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{102000}{200}$ হাজার টাকা

= 510 হাজার টাকা

= 510000 টাকা

সূত্র (4) প্রয়োগ করে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় নির্ণয় :

গণনা কার্য :

মাসিক বিক্রয়ের শ্রেণীবিভাগ (হাজার টাকায়)	মধ্যমান (x)	কারখানা সংখ্যা (f)	কাল্পনিক গড় (A = 525) থেকে পার্থক্য $\ell = x - A$	f.*l*
300 – 350	325	5	– 200	– 1000
350 – 400	375	14	– 150	– 2100
400 – 450	425	23	– 100	– 2300
450 – 500	475	50	– 50	– 2500
500 – 550	525	52	0	0
550 – 600	575	25	50	1250
600 – 650	625	22	100	2200
650 – 700	675	7	150	1050
700 – 750	725	2	200	400
মোট	—	N = 200	—	– 3000

মাসিক বিক্রয়ের যৌগিক গড় $\overline{x}$ হলে

$$\overline{x} = A + \frac{\sum f_i \ell_i}{N}$$

$$= \left(525 - \frac{3000}{200}\right) \text{হাজার টাকা}$$

= 510 হাজার টাকা

= 510000 টাকা।

সূত্র (5) প্রয়োগ করে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় নির্ণয় :

গণনা কার্য :

মাসিক বিক্রয়ের শ্রেণীবিভাগ (হাজার টাকায়)	মধ্যমান (x)	কারখানা সংখ্যা (f)	কাল্পনিক গড় (A = 525) থেকে পার্থক্য $\ell = \frac{x - A}{c}$, c = 50	f.*l*
300 – 350	325	5	– 4	– 20
350 – 400	375	14	– 3	– 42
400 – 450	425	23	– 2	– 46
450 – 500	475	50	– 1	– 50

মাসিক বিক্রয়ের শ্রেণীবিভাগ (হাজার টাকায়)	**মধ্যমান (x)**	**কারখানা সংখ্যা (f)**	**কাল্পনিক গড় (A = 525) থেকে পার্থক্য $\ell = \frac{x-A}{c}, c = 50$**	**$f_i\ell$**
500 – 550	525	52	0	0
550 – 600	575	25	1	25
600 – 650	625	22	2	44
650 – 700	675	7	3	21
700 – 750	725	2	4	8
মোট	—	n = 200	—	– 60

মাসিক বিক্রয়ের যৌগিক গড় $\bar{x}$ হলে

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i \ell_i}{n} \times c$$

$$= \left(525 - \frac{60}{200} \times 50\right) \text{ হাজার টাকা}$$

= 510 হাজার টাকা

= 510000 টাকা

দ্রষ্টব্য : (i) তিনটি পদ্ধতিতে নির্ণেয় যৌগিক গড়ের মানের কোনও তারতম্য হয়না।

(ii) সূত্র (5) প্রয়োগে গণনা কার্য সর্বাপেক্ষা সহজ, তবে শ্রেণীপ্রসার সমান না হলে সূত্র (4) প্রয়োগ করতে হবে।

(iii) সর্বক্ষেত্রে কল্পিত গড় 525 হাজার টাকা ধরা হয়েছে। সুবিধামত মাঝামাঝি ভিন্ন মান নিলেও যৌগিক গড়ের কোনও পরিবর্তন হবে না।

3.4 গুণোত্তর গড়ের সংজ্ঞা

সমজাতীয় **n**-সংখ্যক রাশির গুণোত্তর গড় রাশিগুলির কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা এবং উহার মান রাশিগুলির গুণফলের n-তম মূলের (nth root) সমান।

যদি n সংখ্যক সমজাতীয় রাশি $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ -এর গুণোত্তর গড় G হয়, তবে

$G = (x_1.x_2. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_n)^{1/n}$ .... (6)

ইহাকে অন্যরূপেও প্রকাশ করা হয়। (6)-এর উভয়পক্ষের logarithm লইয়া পাই

$$\log G = \frac{1}{n}\log\left(x_1.x_2 \ldots\ldots\ldots x_n\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\log x_1 + \log x_2 + \ldots\ldots\ldots + \log x_n\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

অর্থাৎ গুণোত্তর গড়ের **logarithm**-এর **মান** রাশিসমূহের logarithm-এর **মানগুলির যৌগিক** গড়ের **সমান**।

আবার যদি কোনও চলকের n সংখ্যক মান $x_1, x_2, ..., x_n$ -এর পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, ...f_n$ হয়, তবে গুনোত্তর গড় G হলে,

$$G = \left\{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} ....x_n^{f_n}\right\}^{\frac{1}{n}} \quad .... (7)$$

যেখানে $n = \sum_{i=1}^{n} f_i$

এখন (7)-এর উভয়পক্ষের logarithm লইয়া পাই,

$$\log G = \frac{1}{n}\{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + ... + f_n \log x_n\}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে গুণোত্তর গড়ের **logarithm**-রাশিগুলির logarithm-এর ভারযুক্ত গড়ের সমান।

উদাহরণ ৬. 9, 24, 64 সংখ্যা তিনটির গুণোত্তর গড় নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সংখ্যা তিনটির গুণোত্তর গড় G হলে,

$G = (9 \times 24 \times 64)^{1/3} = (3 \times 3 \times 8 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4)^{1/3} = (3^3 \times 2^3 \times 4^2)^{1/3}$

$= 3 \times 2 \times 4 = 24$

উদাহরণ ৭. নিম্নলিখিত পাঁচটি সংখ্যার গুণোত্তর গড় নির্ণয় করুন :

47, 52, 66, 85, 123

সমাধান : প্রদত্ত পাঁচটি সংখ্যার গুণোত্তর গড় G হলে,

$$\log G = \frac{1}{5}[\log 47 + \log 52 + \log 66 + \log 85 + \log 123]$$

$$= \frac{1}{5}[1.6721 + 1.7160 + 1.8195 + 1.9294 + 2.0899]$$

$$= \frac{1}{5} \times 9.2269 = 1.8454$$

$\therefore$ G = Anti log(1.8454) = 70.04

উদাহরণ ৮. গুণোত্তর গড় পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত ভারযুক্ত শ্রেণীসূচক বিভাজন ছক থেকে সাধারণ সূচক নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	A	B	C	D	E	F
শ্রেণী সূচক	118	120	97	107	111	93
ভার	4	1	2	6	5	2

সমাধান :

গণনা কার্য :

শ্রেণী	**শ্রেণীসূচক (x)**	**ভার (f)**	**log x**	**f.log x**
A	118	4	2.0719	8.2876
B	120	1	2.0792	2.0792
C	97	2	1.0968	3.9736
D	107	6	2.0294	12.1764
E	111	5	2.0453	10.2265
F	93	2	1.9685	3.9370
মোট	—	20	—	40.6803

এখন, গুণোত্তর গড় G হলে, $\log G = \frac{1}{n}\sum f_i \log_i$

$= \frac{40.6803}{20}$

$= 2.0340$

$\therefore$ G = Anti log (2.0340) = 108.1

3.5 বিবর্ত যৌগিক গড়ের সংজ্ঞা (Definition of H. M)

সমজাতীয় কতকগুলি রাশির বিবর্ত যৌগিক গড় রাশিগুলির কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা এবং উহা রাশিগুলির অনোন্যকের (reciprocal) যৌগিক গড়ের অনোন্যকের সমান।

যদি n সংখ্যক সমজাতীয় রাশি x_1, x_2, ... x_n-এর বির্তক যৌগিক গড় H হয়, তবে

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \quad .... (8)$$

আবার, যদি x_1, x_2, ..., x_k রাশিগুলির পরিসংখ্যা বা ভার যথাক্রমে f_1, f_2, ..., f_k এবং উহাদের বিবর্ত যৌগিক গড় H হয়, তবে

$$H = \frac{n}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots + \frac{f_k}{x_k}} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

যেখানে, $n = \sum f_i$

উদাহরণ ৯. এক ব্যক্তি সাইকেলে ঘন্টায় 20 কিমি বেগে x হইতে y তে যায় এবং ঘন্টায় 24 কিমি বেগে ফিরে আসে? তার ঘন্টায় গড় গতিবেগ কত?

সমাধান : এখান গড় গতিবেগ নির্ণয় করার জন্য বিবর্ত যৌগিক গড় পদ্ধতি প্রয়োগ করা যথোপযুক্ত।

গড় গতিবেগ $H = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{24}}$ কিমি/ঘন্টা

$= \frac{240}{11}$ কিমি/ঘন্টা $= 21.82$ কিমি/ঘন্টা

উদাহরণ ১০. এক ব্যক্তি প্রতি ঘন্টায় 4 মাইল বেগে 12 মাইল, আবার প্রতি ঘন্টায় 5 মাইল বেগে 10 মাইল ভ্রমণ করে। ঐ ব্যক্তির গড় গতিবেগ কত?

সমাধান : এক্ষেত্রে গড় গতিবেগ নির্ণয় করার জন্য ভারযুক্ত বিবর্ত যৌগিক গড় পদ্ধতি প্রয়োগ করা যথোপযুক্ত।

গণনা কার্য :

গতিবেগ (x)	**অতিক্রান্ত পথ (f)**	**(f/x)**
4	12	3
5	10	2
মোট	22	5

$\therefore$ গতিবেগ, $H = \frac{n}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2}}$

$= \frac{22}{5}$ মাইল/ঘন্টা $= 4.4$ মাইল/ঘন্টা

3.5.1 বিভিন্ন প্রকার গড়ের পারস্পরিক সম্পর্ক :

(i) যে-কোন সংখ্যক সংখ্যার যৌগিক গড় (A. M.), গুণোত্তর গড় (G. M) এবং বিবর্ত যৌগিক গড়ের (H.M) মধ্যে সম্পর্ক হল :

A. M $\geq$ G.M $\geq$ H.M

(ii) কেবলমাত্র দুটি প্রদত্ত সংখ্যার ক্ষেত্রে,

A. M. × H. M = $(G.\ M)^2$

3.6 মধ্যমা (Median)

সমজাতীয় কতকগুলি রাশির মধ্যমা রাশিগুলির কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা এবং ইহার মান রাশিগুলিকে মানের ঊর্দ্ধক্রমে (assending order) সাজালে যে রাশিটির অবস্থান ঠিক মাঝখানে হয় তার সমান। অর্থাৎ মধ্যমা রাশিতথ্যমালাকে দুটি সমান অংশে বিভক্ত করে। একটি ভাগের মধ্যের প্রতেকটি রাশির মান মধ্যমা অপেক্ষা কম এবং অপর ভাগের প্রত্যেকটির রাশির মান মধ্যমা অপেক্ষা বেশি।

(i) সরল শ্রেণীর (simple series) ক্ষেত্রে রাশিতথ্যমালায় মোট রাশির সংখ্যা অযুগ্ম (odd) হলে, উহাদের মানের ক্রম-অনুযায়ী সাজিয়ে ঠিক মাঝখানে একটি রাশি পাওয়া যাবে এবং ঐ রাশিটি মধ্যমা হবে। কিন্তু মোট রাশির সংখ্যা যদি যুগ্ম (even) হয়, তবে মানের ক্রম অনুযায়ী সাজিয়ে মধ্যম স্থানে দুটি রাশি পাওয়া যাবে যাদের মধ্যের যে কোনও সংখ্যাকে মধ্যমা হিসাবে গণ্য করা হয়। তবে নির্দিষ্ট একটি মান পাওয়ার জন্য ঐ মানদ্বয়ের যৌগিক গড়কে মধ্যমা হিসাবে ধরা হয়। অর্থাৎ যদি রাশিতথ্যমালায় মোট রাশির সংখ্যা n (অযুগ্ম) হয়, তবে উহাদের মানের ক্রমানুসারে পরপর সাজালে $\frac{n+1}{2}$ তম রাশির মান মধ্যমা হবে এবং n (যুগ্ম) হলে, $\frac{n}{2}$ তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম রাশিদ্বয়ের যৌগিক গড় মধ্যমা হবে।

(ii) পরিসংখ্যা ছকের মাধ্যমে প্রদত্ত রাশিমালা থেকে মধ্যমার মান নিম্নলিখিত সূত্র দিয়ে কেবলমাত্র স্থূলভাবে (approximately) নির্ণয় করা যায়।

$$M = \ell_1 + \frac{\left(\frac{n}{2} - F\right)}{f_m} \times \ell \ ..... \ (10)$$

সেখানে, M = নির্ণেয় মধ্যমার মান,

n = মোট পরিসংখ্যা,

l_1 = যে শ্রেণী বিভাগে মধ্যমা আছে তার নিম্নসীমানা,

F = যে শ্রেণী বিভাগে মধ্যমা আছে তার নিচের শ্রেণী বিভাগের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা

f_m = যে শ্রেণী বিভাগে মধ্যমা আছে তার পরিসংখ্যা,

এবং c = যে শ্রেণী বিভাগে মধ্যমা আছে তার দৈর্ঘ্য।

উদাহরণ ১১. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির মধ্যমা নির্ণয় করো :

(i) 32, 22, 29, 17, 40, 26, 21

(ii) 88, 72, 33, 29, 70, 86, 54, 91, 61, 57

সমাধান : (i) সংখ্যাগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই,

17, 21, 22, 26, 29, 32, 40

মোট রাশির সংখ্যা = 7

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = $\left(\frac{7+1}{2}\right)$তম বা ৪র্থ স্থানে রাশির মান = 26

(ii) সংখ্যাগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রম সাজিয়ে পাই,

29, 33, 54, 57, 61, 70, 72, 86, 88, 91

এখানে রাশির মোট সংখ্যা = 10

নির্ণেয় মধ্যমা $\frac{10}{2}$-তম বা ৫ম ও $\left(\frac{10}{2}+1\right)$-তম বা ৬ষ্ঠ মানের মধ্যবর্তী মানের 61 ও 70-এর মধ্যে যে কোনও সংখ্যা হবে। তবে উহাদের যৌগিক গড় $\frac{61+70}{2}$ বা 65.5 কে নির্দিষ্ট মধ্যমা হিসাবে ধরা হবে।

উদাহরণ ১২. নিম্নলিখিত সরল পরিসংখ্যা বিভাজন করে মধ্যমা নির্ণয় করুন :

x	0	1	2	3	4	5	6	মোট
f	7	44	35	16	9	4	1	116

সমাধান :

গণনা কার্য :

x	**f**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (নিচ থেকে)**
0	7	7
1	44	51
2	⟵ 35 ⟶	86
3	16	102
4	9	111
5	4	115
6	1	116 (= N)
মোট	116 = N	

এক্ষণে $\frac{N}{2}=58$। এই 58-এর স্থান ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা স্তম্ভে 86-এর মধ্যে। ঐ সারিতে চলক x-এর মান 2। সুতরাং, নির্ণেয় মধ্যমা = 2

উদাহরণ ১৩. নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা নির্ণয় করুন :

একটি কারকানায় 300 জন শ্রমিকের মাসিক আয়ের পরিসংখ্যা বিভাজন :

মাসিক আয় (টাকায়)	শ্রমিক সংখ্যা
1000 – 1100	16
1100 – 1200	24
1200 – 1300	59
1300 – 1400	100
1400 – 1500	41
1500 – 1600	31
1600 – 1700	19
1700 – 1800	10
মোট	300

সমাধান :

গণনা কার্য :

মাসিক আয়ের শ্রেণীবিভাগ (টাকায়)	শ্রমিকসংখ্যা (f)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
1000 – 1100	16	16
1100 – 1200	24	40
1200 – 1300	59	99 (= F)
1300 – 1400	← 100 (fm) →	199
1400 – 1500	41	240
1500 – 1600	31	271
1600 – 1700	19	290
1700 – 1800	10	300
মোট	300 (= N)	

এক্ষণে, $\frac{N}{2} = \frac{300}{2} = 150$

যে শ্রেণী বিভাগের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা মোট পরিসংখ্যার অর্ধেকের ঠিক বেশি (just greater), তাতে মধ্যমা আছে। এখানে শ্রেণীবিভাগ 1300 – 1400 তে মধ্যমা আছে।

এখানে ℓ_1 = মধ্যমা শ্রেণীর নিম্ন সীমানা = 1300

F = মধ্যমা শ্রেণীর নিচের শ্রেণীর (অর্থাৎ 1200 – 1300) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা = 99

f_m = মধ্যমা শ্রেণীর পরিসংখ্যা = 100

e = মধ্যমা শ্রেণীর দৈর্ঘ্য = 100

$$\therefore \quad M = \ell_1 + \frac{\frac{n}{2} - F}{f_m} \times c$$

$$= 1300 + \frac{150 - 90}{100} \times 100$$

$$= 1351$$

∴ নির্ণেয় মধ্যমার মান = 1351 টাকা।

3.7 সংখ্যাগুরুমান (Mode)

সমজাতীয় কতকগুলির রাশির সংখ্যাগুরু মান রাশিগুলির কেন্দ্রগীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা ও উহার মান রাশিতথ্যমালায় যেমনটি সর্বাপেক্ষা বেশি বার হয়েছে তার সমান। বাণিজ্যে সংখ্যাগুরু মান বেশি ব্যবহৃত হয়। আবহবার্তা বিভাগে এটি বহুল ব্যবহৃত হয়।

কোনও একটি বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান সবসময় থাকবে এমন কোনও কথা নেই। উদাহরণস্বরূপ, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 বিভাজনের কোনও সংখ্যাগুরু মান নেই। আবার কোনও কোনও বিভাজন ছকের একাধিক সংখ্যাগুরু মান থাকতে পারে। যেমন 1, 3, 5, 8, 11, 5, 6, 2, 5, 9 বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান 5 অর্থাৎ বিভাজনটির একটি সংখ্যাগুরু মান আছে। আবার 1, 5, 4, 3, 8, 4, 5, 6, 9, 5 বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান দুটি অর্থাৎ 4 এবং 5। একটি সংখ্যাগুরু মান থাকলে উক্ত বিভাজন ছকের একক সংখ্যাগুরু মান-বিশিষ্ঠ পরিসংখ্যা বিভাজন (Unimodal Frequency Distribution) বলে। দুই বা ততোধিক সংখ্যাগুরু মান থাকলে উক্ত বিভাজন ছককে দুই বা বহুল সংখ্যাগুরু মান-বিশিষ্ট পরিসংখ্যা বিভাজন (Bimodal or Multimodal Distribution) বলে।

(i) সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান হল চলকের সেই মান যার পরিসংখ্যা সর্বাধিক।

(ii) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে সংখ্যাগুরু মান সঠিকভাবে নির্ণয় করা অসম্ভব। স্থূলভাবে (approximately) সমান শ্রেণীদৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বিভাজনের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত সূত্র দিয়ে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা হয়।

$$\text{সংখ্যাগুরু মান} = \ell_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times c \qquad \ldots (11)$$

যেখানে, ℓ_1 = সংখ্যাগুরু মান শ্রেণীবিভাগের (Modal Class) নিম্ন সীমানা

d_1 = সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা ও তার ঠিক পূর্ববর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যার পার্থক্য

d_2 = সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা ও তার ঠিক পরবর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যার পার্থক্য

c = সংখ্যাগুরু মান শ্রেণীর দৈর্ঘ্য

যদি f_o, f_{-1}, f_1 যথাক্রমে সংখ্যাগুরু শ্রেণী, তৎপূর্ববর্তী শ্রেণী ও তৎপরবর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যা হয় তবে $d_1 = |f_o - f_{-1}|$ এবং $d_2 = |f_o - f_1|$

যদি পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণী দৈর্ঘ্যগুলি সমদৈর্ঘ্য বিশিষ্ট না হয়, তবে ঐ সব শ্রেণীর পরিসংখ্যা ঘনত্ব নিয়ে কাজ করতে হয়। মধ্যক, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের স্থুল (approximate) সম্পর্ক।

মধ্যক – সংখ্যাগুরু মান = 3 (মধ্যক – মধ্যমা)

ব্যবহার করেও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ ১৪. নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করো।

ওজন (কিগ্রা)	পরিসংখ্যা
45	8
50	15
55	25
60	28
65	14
70	10
মোট	100

সমাধান : যেহেতু 60 কিগ্রা ওজনের পরিসংখ্যা 28 ও ইহাই সর্বোচ্চ। তাই সংখ্যাগুরু মান 60 কিগ্রা।

উদাহরণ ১৫. নিম্নলিখিত বিভাজন ছকে 100 টি দোকানের প্রত্যেক মাসের লাভ টাকাতে দেওয়া আছে। সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

লাভ (টাকায়)	0 – 100	100 – 200	200 – 300	300 – 400	400 – 500	500 – 600
দোকানের সংখ্যা	12	18	27	20	17	6

সমাধান : সংখ্যাগুরু শ্রেণী = 200 – 300

এখানে, $f_0 = 27$, $f_{-1} = 18$, $f_1 = 20$

$$d_1 = f_0 - f_{-1} = 27 - 18 = 9$$

$$d_2 = f_0 - f_1 = 27 - 20 = 7$$

$$c = 100$$

$$l_1 = 200$$

∴ সংখ্যাগুরু মান $= 200 + \frac{9}{9+7} \times 100 = 236.25$ টাকা।

3.7.1 যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের তুলনা

(i) একটি ভালো পরিমাপজ সুসংজ্ঞাত হবে। যৌগিক গড় ও সংখ্যাগুরু মান সুসংজ্ঞাত। রাশির সংখ্যা যুগ্ম ছাড়া মধ্যমাও সুসংজ্ঞাত।

(ii) ভালো পরিমাপক সহজে নির্ণয় করা যাবে। তিনটি পরিমাপকই প্রায় সমান শ্রমসাধ্য। অবিচ্ছিন্ন (Continuous) চলকের ক্ষেত্রে কেবলমাত্র চলকের কয়েকটি মান দেওয়া থাকলে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা অসুবিধাজনক।

(iii) ভালো পরিমাপক সহজবোধ্য হবে। তিনটি পরিমাপকই সহজবোধ্য। তবে যৌগিক গড় অধিকতর সহজবোধ্য।

(iv) ভালো পরিমাপক সমস্ত রাশির ওপর নির্ভর করে নির্ণয় করা হবে। তিনটি পরিমাপের মধ্যে যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে প্রত্যক্ষভাবে এবং মধ্যমাও সংখ্যাগুরু মানের ক্ষেত্রে পরোক্ষভাবে সমস্ত রাশির মান নেওয়া হয়। অর্থাৎ, রাশির তথ্যমালার একটি মান পরিবর্তন হল যৌগিক গড়ের মান পরিবর্তন হবে, কিন্তু মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের ক্ষেত্রে তা নাও হতে পারে। রাশিমালার মধ্যে যদি দু-একটি অস্বাভাবিক বড় বা ছোট মান থাকে তাতে যৌগিক গড় বিশেষভাবে প্রভাবিত হবে, মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান প্রভাবিত হবে না।

(v) ভালো পরিমাপকের ক্ষেত্রে সরল বীজগাণিতিক ধর্ম থাকা বাঞ্ছনীয়। কেবলমাত্র যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে এটি প্রতিফলিত হয়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের ক্ষেত্রে হয় না।

(vi) প্রান্তীয় শ্রেণীবিভাগ মুক্ত (open) হলে মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান প্রভাবিত হয় না, কিন্তু যৌগিক গড় নির্ণয় অসুবিধাজনক।

3.8 চতুর্থক, দশমক ও শততমক (Quartiles, Deciles and Percentiles)

মধ্যমা, মানের ঊর্দ্ধক্রমে সাজানো রাশিতথ্যমালাকে দুটি সমানভাগে ভাগ করে। ফলে মধ্যমার উভয়দিকে সমান সংখ্যক পর্যবেক্ষণ থেকে থাকে। একইভাবে, রাশিতথ্যমালার যে মানগুলি রাশিতথ্যমালাকে কয়েকটি নির্দিষ্ট সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করে সেই মানগুলিকে রাশিতথ্যমালার অংশক (Partition) বলে। এগুলির মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ হল — চতুর্থক, দশমক ও শততমক।

চতুর্থক (Quartiles) :

মানের ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত রাশিমালা যে তিনটি মান দ্বারা চারটি সমান অংশে বিভক্ত হয় তাদের চতুর্থক বলে। Q_1, Q_2 ও Q_3-কে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় চতুর্থক বলে। স্পষ্টতঃ Q_2 হল বিস্তৃতির মধ্যমা।

দ্রষ্টব্য : চতুর্থক সম্পর্কে পরবর্তী এককে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

দশমক (Deciles) : রাশিতথ্যমালার মানগুলিকে ঊর্দ্ধক্রমে সাজালে, রাশিতথ্যমালার যে নয়টি মান উহাকে দশটি সমান ভাগে বিভক্ত করে তাদের দশমক বলে। D_1, D_2, D_3, ..., D_9 দ্বারা দশমকগুলি সূচিত হয়।

(ক) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন (Simple frequency distribution) :

$D_1 = \frac{N+1}{10}$ তম পদ

$D_2 = \frac{2(N+1)}{10}$ তম পদ

$D_k = \frac{k(N+1)}{10}$ তম পদ

(k = 1, 2, ... , 9)

(খ) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন (Grouped frequency distribution) :

D_1 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $\frac{N}{10}$ -এর অনুরূপ রাশির মান;

D_2 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $\frac{2N}{10}$ -এর অনুরূপ রাশির মান;

D_k = ক্রমযৌগিখ পরিসংখ্যার $\frac{kN}{10}$ -এর অনুরূপ রাশির মান;

(k = 1, 2,............., 9)

শততমক (Percentiles) :

রাশিতথ্যমালার মানগুলিকে ঊর্ধ্বক্রমে সাজালে, রাশিতথ্যমালার যে 99টি মান উহাকে 100টি সমানভাগে বিভক্ত করে তাদের শততমক বলে। P_1, P_2, P_3, ... P_{99} দ্বারা শততমকগুলি সূচিত হয়।

(ক) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন (Simple frequency distribution) :

$P_1 = \frac{N+1}{100}$ -তম পদের মান ;

$P_2 = \frac{2(N+1)}{100}$ -তম পদের মান ;

$P_k = \frac{k(N+1)}{100}$ -তম পদের মান (k – 1, 2, ..., 99)।

(খ) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন (Grouped frequency distribution) :

P_1 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $\frac{N}{100}$ -এর অনুরূপ রাশির মান ;

P_2 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $\frac{2N}{100}$ -এর অনুরূপ রাশির মান ;

P_k = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $\frac{kN}{100}$-এর অনুরূপ রাশির মান ;

(k= 1, 2, ... 99)

দ্রষ্টব্য : চতুর্থত, দশমক ও শততমক নির্ণয়ে সরল অন্তঃমান পদ্ধতির ব্যবহার সহজততর হয়।

উদাহরণ ১৬ : নীচে 100 জন ছাত্রের রাশিবিজ্ঞানে প্রাপ্ত নম্বরের বিভাজন দেওয়া হল ঃ

প্রাপ্ত নম্বর (অপেক্ষা বেশি) [Marks more than]	0	10	20	30	40	50
ছাত্রসংখ্যা (No. of Students)	100	88	72	42	16	6

যদি 60% ছাত্র পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়, তবে সব থেকে কম কত নম্বর পেয়ে একজন চাত্র উত্তীর্ণ হয়েছে?

সমাধান : উত্তীর্ণ হওয়ার সবচেয়ে কমপ্রাপ্ত নম্বর বা তার চেয়ে বেশী পেয়েছে 60% ছাত্র এবং কম পেয়েছে 40% ছাত্র। সুতরাং চতুর্থ দশমকই হল উত্তীর্ণ হওয়ার সবচেয়ে কমপ্রাপ্ত নম্বর।

দশমকের গণনাকার্য্য

শ্রেণী	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা বেশী)	পরিসংখ্যা (f)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম)
0 – 10	100	12	12
10 – 20	88	16	28
20 – 30	72	30	58
30 – 40	42	26	84
40 – 50	16	10	94
50 এবং এর বেশী	6	6	100
মোট	—	100 = N	—

এখন $\frac{4N}{10} = \frac{4 \times 100}{10} = 40$

$\therefore$ চতুর্থক দশমক শ্রেণী হল : 20 – 30

$$\therefore \quad D_4 = \ell_1 + \frac{\frac{4N}{10} - F}{f} \times i \;=\; 20 + \frac{40-28}{30} \times 10 = 24$$

$\therefore$ উত্তীর্ণ হওয়ার সবচেয়ে কম প্রাপ্ত নম্বর হল 24।

উদাহরণ ১৭ : নিম্নে 150 জন ছাত্রের হিসাবশাস্ত্রে প্রাপ্ত নম্বর প্রদত্ত হল :

প্রাপ্ত নম্বর :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
ছাত্রসংখ্যা	6	15	13	50	30	21	15

যদি 64% ছাত্র ঐ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়ে থাকে, তবে সর্বনিম্ন পাশ মার্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : (100 – 64)% = 36% ছাত্র উক্ত পরীক্ষায় অনুত্তীর্ণ হয়েছে। সুতরাং 36% ছাত্র সর্বনিম্ন পাশ মার্কের চেয়ে কম নম্বর পেয়েছে অর্থাৎ 36-তম শততমকই হচ্ছে সর্বনিম্ন পাশ মার্ক।

এখানে N = 150, $\therefore \frac{36N}{100} = \frac{\overset{18}{\cancel{36}} \times \overset{3}{\cancel{150}}}{\underset{2}{\cancel{100}}} = 54$

শততমক নির্ণয়ের গণনাকার্য্য

প্রাপ্ত নম্বর (শ্রেণী)	ছাত্রসংখ্যা (f)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম)
0 – 10	6	6
10 – 20	15	21
20 – 30	13	34
30 – 40	50	84
40 – 50	30	114
50 – 60	21	135
60 – 70	15	150

36-তম শতকমান শ্রেণী হল : 30 – 40

এখন, $\boxed{\begin{array}{c|c} \begin{matrix}30\\ \downarrow\\ 40\end{matrix}\; P_{36} & \begin{matrix}34\\ \downarrow\\ 84\end{matrix}\; 54 \end{array}}$ সুতরাং সরল অন্তঃমান নির্ণয়ের সূত্রানুযায়ী, $\frac{P_{36} - 30}{40 - 30} = \frac{54 - 34}{84 - 34}$

বা, $P_{36} = 30 + \frac{\cancel{20}}{\cancel{50}} \times \overset{2}{\cancel{10}} = 34$

সুতরাং, সর্বনিম্ন পাশমার্ক হল 34।

3.9 অনুশীলনী

(১) নীচের প্রতি ক্ষেত্রে কোন্ প্রকারের গড় প্রয়োগ করা উচিত লিখুন :

(ক) কোনও পরীক্ষায় 100 জন ছাত্রের অর্জিত নম্বর।

(খ) কোনও দোকানে যে সাইজের জুতো সর্বাধিক সংখ্যায় বিক্রয় হয়।

(গ) মুক্ত-প্রান্ত শ্রেণী বিভাগযুক্ত পরিসংখ্যা বিভাজন।

(ঘ) অবচয়ের বিভিন্ন হার যা অবচয়িত মূল্যের উপর ধার্য করা হয়।

(২) নিচের প্রতিক্ষেত্রে একটি করে উদাহরণ দিন :

(ক) যৌগিক গড়ের পরিবর্তে মধ্যমান প্রয়োগ যথাযথ হয়।

(খ) যৌগিক গড়ের প্রয়োগ না করে বিবর্ত গড় ব্যবহার করা সঠিক।

(গ) মধ্যমার পরিবর্তে সংখ্যাগুরু মানের প্রয়োগ যথাযথ হয়।

(ঘ) গড় হিসাবে যৌগিক গড়ের চেয়ে গুণোত্তর গড়ের প্রয়োগ যথাযথ হয়।

(৩) কোনও চলকের সকল মানের সাথে যদি 10 যোগ করা হয়, তবে তাদের মধ্যমার কী পরিবর্তন হবে?

(৪) যদি একটি চলক x-এর দুটি মানের গাণিতিক গড় ও গুণোত্তর গড় যথাক্রমে 5 এবং 4 হয়, তবে মান দুটি বিবর্ত গড় নির্ণয় করুন।

(৫) রাশিতথ্যমালার কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ বলতে কী বোঝ?

(৬) 'ভারযুক্ত গড়' বলতে কী বোঝ? উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

(৭) কোনও একটি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে কোন্ গড় ব্যবহার করবে তা আলোচনা করুন।

(৮) নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

7, 4, 3, 5, 6, 3, 2, 4, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 4, 3, 5, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 2, 3

(৯) যৌগিক গড় নির্ণয় কর :

(i) 2, 4, 6, ... 2n

(ii) 1, 2, 3, ... 16 টি পদ পর্যন্ত

(iii) 3, 6, 12, 24,......... n-সংখ্যাক পদ পর্যন্ত

(১০) 3, 6, 24 ও 48 সংখ্যা চারটির যৌগিক গুণোত্তর ও বিবর্ত যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

(১১) নিম্নলিখিত 80-টি আপেলের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন :

ওজন (গ্রাম)	110–119	120–129	130–139	140–149	150-159	160–169	170–179	180–189
পরিসংখ্যা	5	7	12	20	16	10	7	3

(১২) নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	0–4	5–14	15–19	20–34	35-39
পরিসংখ্যা	2	8	6	14	5

একক 4 ❑ বিস্তৃতির পরিমাপ (Measure of Dispersion)

গঠন

4.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি বুঝতে পারবেন

- বিস্তৃতি কাকে বলে?
- বিস্তৃতির পরম পরিমাপক সমূহ কী কী?
- পরম পরিমাপক সমূহের তুলনামূলক আলোচনা।
- বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপকের ধারণা।

4.1 প্রস্তাবনা

পরিসংখ্যা বিষয়ক যে কোন অনুসন্ধানে রাশিতথ্যের গড়মান, মধ্যমা বা ভুয়িষ্ঠক সকল সময় উহার প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্য অনুধাবনের জন্য যথার্থ নয়। রাশিতথ্যমালার মানগুলি উক্ত কেন্দ্রীয় মানগুলির চতুর্দিকে কিরূপে বিস্তৃত সেটা জানাও জরুরি। অনেক সময় দুটি পৃথক রাশিতথ্যমালার গড় একই হলেও তাদের প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্য আলাদা হয়। সুতরাং রাশিতথ্যমালার আরেকটি সংখ্যাগত পরিমাপক হল বিস্তৃতি।

4.2 বিস্তৃতির পরিমাপ (Measures of Dispersion)

যে সংখ্যাগত পরিমাপের সাহায্যে কোনও পরিসংখ্যা বিভাজন বা রাশিতথ্যমালার মানগুলি তাদের কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের চারদিকে কীভাবে বিস্তৃত (dispersed) অথবা মানগুলির সঙ্গে কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের মানের পার্থক্য (deviation) অথবা প্রভেদ (variation) প্রকাশ করে, তাকে বিস্তৃতির পরিমাপ বলে।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক সংখ্যার (গড় বা মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান) দ্বারা কোনও পরিসংখ্যা বিভাজন বা রাশিতথ্যমালার বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে সম্পূর্ণভাবে বুঝতে পারা যায় না। নিম্নলিখিত উদাহরণ পর্যালোচনা করলে তা বুঝতে পারা যাবে।

A—শ্রেণী—30, 32, 36, 38, 39 মোট—175

B— শ্রেণী—4, 19, 36, 53, 63 মোট—175

প্রদত্ত শ্রেণীদ্বয়ের যৌগিক গড় একই অর্থাৎ 35। এমনকি মধ্যমাও একই ও উহা 36. ফলে শুধু গড় বা মধ্যমা দিয়ে বিচার করলে শ্রেণীদ্বয়ের পার্থক্য বোঝা যাবে না। তবে দেখা যাচ্ছে A শ্রেণীর মানগুলি একে অন্যের কাছাকাছি এবং উহার গড় ও মধ্যমারও কাছাকাছি। কিন্তু B শ্রেণীর মানগুলির মধ্যে সেরকম কোনও বৈশিষ্ট্য পাওয়া যাচ্ছে না। এবং একে অপরের থেকে খুবই ছড়ানো অবস্থায় আছে। এইজন্য আমরা B-শ্রেণীর মানগুলি থেকে বেশি ছড়িয়ে আছে বলতে পারি। এ থেকে বুঝতে পারা যাচ্ছে, কেবলমাত্র গড় পরিসংখ্যা বিভাজনের সব বৈশিষ্ট্য প্রকাশের ক্ষেত্রে যথেষ্ট নয় এবং যেহেতু বিস্তৃতির পরিমাপের প্রয়োজন আছে।

বিস্তৃতির পরিমাপ (Measures of Dispersion)

- পরম মান (Range)
  - প্রসার (Range)
  - চতুর্থক বিচ্যুতি (Quartile Deviation)
  - গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation)
  - সম্যক বিচ্যুতি (Standard Deviation)
- আপেক্ষিক মান (Relative Measure)
  - চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক (Coefficient of Quartile Deviation)
  - গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক (Coefficient of Mean Deviation)
  - ভেদাঙ্ক (Coefficient of Varioation)

4.2.1 বিস্তৃতির পরম পরিমাপসমূহ (Absolute Measures of Disperison)

বিস্তৃতির পরম পরিমাপগুলি হল —

(i) প্রসার (Range)

(ii) চতুর্থক বিচ্যুতি (Quartile Deviation or Semi-interquartile range)

(iii) গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation)

(iv) সম্যক বিচুতি (Standard Deviation)

রাশিতথ্যমালার মানগুলি যে এককে প্রকাশিত হয়, পরম বিস্তৃতির পরিমাপও সেই এককে প্রকাশ করা হয়।

(i) প্রসার (Range) :

প্রসার হল রাশিতথ্যমালার রাশিগুলির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম রাশিদ্বয়ের মধ্যে পার্থক্যের মান।

অর্থাৎ, প্রসার = বৃহত্তম মান – ক্ষুদ্রতম মান।

ইহা খুব সহজবোধ্য এবং খুব সহজে ও অল্পসময়ে নির্ণয় করা যায়। পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রান্তীয় শ্রেণীবিভাগ যদি মুক্ত (open) থাকে, তবে এইটি পরিমাপ করা যায় না। প্রসার একই হলেও রাশিমালার বিচ্যুতি আলাদা হওয়া সম্ভব। বাস্তবে বিস্তৃতির পরিমাপ হিসেবে এটি খুবকম ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ ১. নিম্নলিখিত রাশিগুলির (টাকায়) প্রসার নির্ণয় করুন।

6, 4, 1, 6, 5, 10, 3

সমাধান : এখানে সর্বোচ্চ মান = 10

সর্বনিম্ন মান = 1

$\therefore$ নির্ণেয় প্রসার = (10 − 1) টাকা = 9 টাকা।

(ii) চতুর্থক বিচ্যুতি (Quartile Deviation or Semi-Interquartile Range) :

রাশিমালার মানগুলিকে ঊর্দ্ধক্রমে সাজালে ঠিক মধ্যমস্থানের রাশিটিকে মধ্যমা বলা হয়। রাশিতথ্যমালাকে মানের উর্দ্ধক্রমে সাজালে উহার এক-চতুর্থাংশ, দুই-চতুর্থাংশ ও তিন-চতুর্থাংশ অবস্থানে স্থিত রাশি তিনটির মানই তিনটি চতুর্থকের মান। এক-চতুর্থাংশ অবস্থানে স্থিত রাশির মানকে প্রথম চতুর্থক (First Quartile) বা নিম্ন চতুর্থক (Lower Quartile) এবং তিন-চতুর্থাংশ অবস্থানে স্থিত রাশির মানকে তৃতীয় চতুর্থক (Third Quartile) বা উচ্চ চতুর্থক (Upper Quartile) বলে। দ্বিতীয় চতুর্থকের মান রাশিমালার মধ্যমার মানের সমান হবে। সাধারণত প্রথম চতুর্থক Q_1 এবং তৃতীয় চতুর্থক Q_3 দ্বারা সূচিত করা হয়। রাশিতথ্যমালার রাশিগুলির মোট সংখ্যার এক-চতুর্থাংশ Q_1 অপেক্ষা ছোট ও তিন-চতুর্থাংশ উহার চেয়ে বড় হয় এবং মোট সংখ্যার তিন-চতুর্থাংশ Q_3 অপেক্ষা ছোট এবং এক-চতুর্থাংশ উহার চেয়ে বড় হয়। এদের একটি সাধারণ পরিমাপ হচ্ছে দশমক (Decile) অথবা শততমক (Percentile)। একটি দশমক বা শততমক, Z_p-তম মান হচ্ছে সেই মান যার নিচে p-অংশক রাশি ও উপরে (l − p) অংশক রাশি রয়েছে।

সরল বিভাজন ছকের ক্ষেত্রে, যদি রাশিগুলির মোট সংখ্যা n হয় এবং ঊর্দ্ধক্রমে সাজানো হয়, তবে $\frac{n}{4}$-তম এবং $\frac{3n}{4}$-তম অবস্থানের রাশিদ্বয়ের মান যথাক্রমে Q_1 ও Q_3 -এর মান হবে।

শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা ছকের ক্ষেত্রে, প্রদত্ত রাশিমালার চতুর্থকদ্বয়ের মান নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

$$Q_1 = \ell_1 + \frac{\left(\frac{n}{4} - F\right)}{f_m} \times c \qquad \text{... (1)}$$

$$Q_3 = \ell_1 + \frac{\left(\frac{3n}{4} - F\right)}{f_m} \times c \qquad \text{... (2)}$$

যেখানে, l_1 = যে শ্রেণীবিভাগে প্রথম বা তৃতীয় চতুর্থক থাকে তার নিম্নসীমানা,

F = যে শ্রেণীতে প্রথম বা তৃতীয় চতুর্থক আছে তার নিচের শ্রেণীর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা,

f_m = যে শ্রেণীতে প্রথম বা তৃতীয় চতুর্থক আছে তার পরিসংখ্যা,

c = যে শ্রেণীতে প্রথম বা তৃতীয় চতুর্থক আছে তার দৈর্ঘ্য এবং

n = মোট পরিসংখ্যা।

নিম্ন ও উচ্চ চতুর্থক থেকে অন্য একটি বিস্তৃতির পরিমাপ পাওয়া যায়। যদি চতুর্থকদ্বয়ের মধ্যে পার্থক্য বেশি হয়, তবে রাশিমালার বিস্তৃতিও বেশি হবে। মধ্যমা থেকে নিম্ন চতুর্থকের পার্থক্য এবং উচ্চ চতুর্থকের থেকে মধ্যমার পার্থক্যের গড়কে একটি নতুন বিস্তৃতির পরিমাপ হিসাবে গণ্য করা হয়। ইহাকে চতুর্থক বিচ্যুতি বলা হয়। তাহলে

$$\text{চতুর্থক বিচ্যুতি } (Q) = \frac{(M - Q_1) + (Q_3 - M)}{2}$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2} \text{ .... (3)}$$

যেখানে, Q_1 = নিম্ন চতুর্থক বা প্রথম চতুর্থক,

Q_3 = উচ্চ চতুর্থক বা তৃতীয় চতুর্থক।

চতুর্থক বিচ্যুতিকে অর্ধ-চতুর্থক প্রসারও (Semi Interquartile Range) বলা হয়।

উদাহরণ ২. একক-৩-এর উদাহরণ ১১ (ii)-এর চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : সংখ্যাগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রমে সাজিয়ে পাই,

29, 33, 54, 57, 61, 70, 72, 86, 88, 91

মোট রাশির সংখ্যা = **n** = 10

$\therefore$ প্রথম চতুর্থক $(Q_1) = \frac{n}{4}$ তম বা 2.5 তম রাশি = 3 তম রাশি = 54

$\therefore$ তৃতীয় চতুর্থক $(Q_3) = \frac{3n}{4}$ তম বা 7.5 তম রাশি = 8 তম রাশি = 86

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্থক বিচ্যুতি $(Q) = \frac{86 - 54}{2} = 16$

উদাহরণ ৩. একক-৩-এর উদাহরণ ১২-এর চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে, $\frac{N}{4} = \frac{116}{4} = 29$ এবং $\frac{3N}{4} = 87$

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা স্তম্ভ পর্যবেক্ষণ করে পাই,

প্রথম চতুর্থক $(Q_1) = 1$ এবং তৃতীয় চতুর্থক $(Q_3) = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্থক বিচ্যুতি $(Q) = \frac{3-1}{2} = 1$

উদাহরণ ৪. একক-৩-এর উদাহরণ ১৩-এর চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $\frac{n}{4} = \frac{300}{4} = 75$ এবং $\frac{3n}{4} = 225$

$\therefore$ প্রথম চতুর্থক $(Q_1) = 1200 + \frac{(75-40)}{59} \times 100 = 1259.32$ টাকা।

$\therefore$ তৃতীয় চতুর্থক $(Q_3) = l_1 + \frac{\left(3\frac{n}{4} - F\right)}{f_m} \times c$

$= 1400 + \frac{(225-199)}{41} \times 100 = 1463.41$ টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্থক বিচ্যুতি $(Q) = \frac{(Q_3 - Q_1)}{2} = 102.045$ টাকা।

(iii) গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation) :

গড় বিচ্যুতি হল কোনও একটি চলকের মানগুলির কোনও একটি (কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের গড়, যখন মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান) মান থেকে উহাদের মানগুলির বিস্তৃতির একটি পরম পরিমাপ এবং উহার মান, যৌগিক গড়, মধ্যমা বা ভূয়িষ্ঠক থেকে চলকের মানগুলির ধনাত্মক পার্থক্যের যৌগিক গড়ের সমান।

যদি কোনও একটি চলকের n-সংখ্যক মানগুলি যথাক্রমে $x_1, x_2, ...x_n$ এবং ঐ মানগুলির যৌগিক গড় $\overline{x}$ হয় তবে, $\overline{x}$ এর সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি হল—

$$MD_{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n} \quad ... (4)$$

আবার, যদি $x_1, x_2, ..., x_k$ এর পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, ..., f_k$ হয়, তবে গড় বিচ্যুতি,

$$MD_{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - \overline{x}| f_i}{n} \quad ... (5)$$

যেখানে, $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

উদাহরণ ৫. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় ও মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

46, 79, 26, 85, 39, 65, 99, 29, 56, 72

সমাধান : প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রমে সাজিয়ে পাই,

26, 29, 39, 46, 56, 65, 72, 79, 85, 99

এখানে, n = 10

∴ $\frac{n}{2}$ তম বা 5 তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ -তম বা 6 তম মানের যৌগিক গড় $\frac{56+65}{2} = 60.5$ কে মধ্যমা হিসাবে ধরা যাক।

আবার সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় = $\frac{26+29+39+46+56+65+72+79+85+99}{10}$

$= \frac{596}{10} = 59.6$

গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের গণনা কার্য :

রাশির মান (x)	রাশিগুলির যৌগিক গড় থেকে ধনাত্মক পার্থক্য = $\|x - 59.6\|$	রাশিগুলির মধ্যমা থেকে ধনাত্মক পার্থক্য = $\|x - 60.5\|$
26	33.6	34.5
29	30.6	31.5
39	20.6	21.5
46	13.6	14.5
56	3.6	4.5
65	5.4	4.5
72	12.4	11.5
79	19.4	18.5
85	25.4	24.5
99	39.4	38.5
মোট	204.0	204.0

∴ যৌগিক গড়ের সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতির মান, $MD_{\overline{x}} = \frac{204}{10} = 20.4$

∴ মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতির মান, $MD_{M\overline{e}} = \frac{204}{10} = 20.4$

উদাহরণ ৬. একক-৩ এর উদাহরণ-২ এর ক্ষেত্রে মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ময় করুন।

সমাধান : গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য গণনাকার্য :

দূরভাষ (x)	পরিসংখ্যা (f)	যৌগিক পরিসংখ্যা	$\lvert x - Me \rvert$	$\lvert x - Me \rvert f$
0	4	4	4	16
1	10	14	3	30
2	13	27	2	26
3	21	48	1	21
4	23	71	0	0
5	21	92	1	21
6	17	109	2	34
7	10	119	3	30
8	1	120	4	4
মোট	120	—	—	182

এখানে মধ্যমা, Me = 4

$\therefore$ মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি, $MD_{Me} = \frac{182}{120} = 15.17$ (প্রায়)

উদাহরণ 7. নিম্নের রাশিতথ্যের যৌগিক গড় ও মধ্যমা সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

শ্রেণীবিভাগ	0–10	10–20	20–30	30–40
পরিসংখ্যা	2	6	8	4

সমাধান : যৌগিক গড় ও মধ্যমা নির্ণয়ের গণনাকার্য

শ্রেণীবিভাগ	পরিসংখ্যা (f)	মধ্যমান (x)	x– A (A=25)	$y = \frac{x - A}{i}$ (i = 10)	fy	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা-কম)
0 – 10	2	5	– 20	– 2	– 4	2
10 –20	6	15	– 10	1	– 6	8
20 – 30	8	25	0	0	0	16
30 – 40	4	35	10	1	4	20 = N
মোট	N = 20				– 6	

$\therefore$ যৌগিক গড় $(\bar{x}) = A + i \times \left(\frac{\sum fy}{N}\right) = 25 + 10 \times \left(\frac{-6}{20}\right) = 25 - 3 = 22$

এখানে, $\frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10$, উহা ক্রমযৌগি পরিসংখ্যা 8 ও 16 এর মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং শ্রেণীবিভাগ 20 – 30-তে মধ্যমা আছে।

$\therefore$ মধ্যমা (M) = $l_1 + \frac{\frac{N}{2} - F}{f_m} \times i = 20 + \frac{10-8}{8} \times 10 = 22.5$

যৌগিক গড় ও মধ্যমা সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের গণনাকার্য্য

x	f	$\mid x - \bar{x} \mid$	$f \times \mid x - \bar{x} \mid$	$\mid x - M \mid$	$f \times \mid x - M \mid$
5	2	17	34	17.5	35
15	6	7	42	7.5	45
25	8	3	24	2.5	20
35	4	13	52	12.5	50
মোট	20	—	152	—	150

$\therefore$ যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি $\frac{\sum fx \mid x - \bar{x} \mid}{N} = \frac{152}{20} = 7.6$

এবং মধ্যমা সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি $= \frac{\sum f \times \mid x - M \mid}{N} = \frac{150}{20} = 7.5$

(iv) সম্যক বা প্রমাণ বিচ্যুতি (Standard Deviation) :

সম্যক বিচ্যুতি বিস্তৃতির সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ পরম পরিমাপক এবং ইহার মান রাশিমালার যৌগিক গড় থেকে রাশিগুলির পার্থক্যের বর্গের যৌগিক গড়ের ধনাত্মক বর্গমূলের সমান।

সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ের সূত্রাবলী :

(ক) সরল সংখ্যাশ্রেণীর সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত যে কোনও একটি সূত্র প্রয়োগে করা যায় :

(i) $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ ... (6)

(ii) $s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$ ... (7)

(খ) পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত যে কোনও একটি সূত্র প্রয়োগে করা যায় :

(i) $s = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}}$ .... (8)

(ii) $s = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2 f_i}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2 f_i}{n} - \left(\dfrac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2}$

$= \dfrac{\sqrt{n\sum x_i^2 f_i - \left(\sum x_i f_i\right)^2}}{n}$ .... (9)

(iii) $S/_A = i \times \left\{\sqrt{\dfrac{\sum fy^2}{n} - \left(\dfrac{\sum fy}{n}\right)^2}\right\}$ ... (10)

সেখানে, $y = \dfrac{x - A}{i}$

যেখানে, s : সম্যক বা প্রমাণ বিচ্যুতির প্রতীক।

$\bar{x} : x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$ -এর যৌগিক গড়।

$n = \sum f_i$ = পরিসংখ্যা বিভাজনের মোট পরিসংখ্যা।

সম্যক বা প্রমাণ বিচ্যুতির ধর্ম :

(ক) যদি চলকের মানগুলি সমান হয়, তবে সম্যক বিচ্যুতির মান শূন্য হবে। অর্থাৎ

$x_i = c$; $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$ হলে $s = 0$

(খ) সম্যক বিচ্যুতির মান মূল বিন্দুর অবস্থানের ওপর (Origin) নির্ভর করে না, কিন্তু চলকের একক বা স্কেলের (Unit or Scale) ওপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ, যদি $l = \dfrac{x - a}{c}$ হয়, তবে $S_x = |c| S_l$

(গ) যদি $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_{n_1}$ এই n_1 সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় ও সম্যক বিচ্যুতি $\bar{x}$ ও s_x এবং $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_{n_2}$ -এই n_2 সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় ও সম্যক বিচ্যুতি $\bar{y}$ ও s_y হয়, তবে $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n_2}$ -এই $(n_1 + n_2)$ সংখ্যক রাশির সম্যক বিচ্যুতি হবে

$$\sigma = \left\{\frac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1\left(\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right)^2 + n_2\left(\bar{y} - \bar{\bar{x}}\right)^2}{n_1 + n_2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

যেখানে, $\overline{\overline{x}} = \frac{n_1\overline{x} + n_2\overline{y}}{n_1 + n_2}$

(ঘ) সম্যক বিচ্যুতি রাশিগুলির পার্থক্যের বর্গের যৌগিক গড়ের ধনাত্মক বর্গমূলগুলোর মধ্যে সবচেয়ে ছোটো।

অর্থাৎ, $\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^2} \le \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i - A)^2}$ যে কোনও A-এর জন্য।

উদাহরণ ৮. নিম্নলিখিত রাশিগুলির সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় কর : 49, 63, 46, 59, 65, 52, 60, 54

সমাধান :

সম্যক বিচ্যুতির গণনা কার্য :

রাশি (x)	যৌগিক গড় 56 হইতে রাশিগুলির পার্থক্য, d = x – 56	d^2
49	– 7	49
63	7	49
46	– 10	100
59	3	9
65	9	81
52	– 4	16
60	4	16
54	– 2	4
448	—	324

রাশিগুলির যৌগিক গড়, $\overline{x} = \frac{448}{8} = 56$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্যক বিচ্যুতি $\therefore$ $s = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{324}{8}} = \frac{9}{2}\sqrt{2} = 6.36$ (প্রায়)

উদাহরণ ৯. নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনের সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

x	5	15	25	35	45	55	65	75
f	3	7	9	23	15	8	6	4

সমাধান :

সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ের গণনা কার্য :

x	f	$y=\frac{x-35}{10}$	fy	fy^2
5	3	– 3	– 9	27
15	7	–2	– 14	28
25	9	– 1	– 9	9
35	23	0	0	0
45	15	1	15	15
55	8	2	16	32
65	6	3	18	54
75	4	4	16	64
মোট	75	—	33	229

এখন, $s_y^2=\frac{\sum f_i y_i^2}{n}-\left(\frac{\sum f_i y_i}{n}\right)^2 = \frac{229}{75} - \left(\frac{33}{75}\right)^2 = 3.053 - (0.44)^2 = 2.859$

$\therefore\ S_y=\sqrt{2.859}=1.69$

$\therefore\ s_x=|c|\,s_y=10\times 1.69=16.9$

উদাহরণ ১০. একটি পরীক্ষায় ২০০ জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ :

নম্বর	**ছাত্রসংখ্যা**
10-এর কম	28
20-এর কম	60
30-এর কম	100
40-এর কম	150
50-এর কম	174
60-এর কম	190
70-এর কম	200

উক্ত রাশিতথ্যের যৌগিক গড় ও সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে যৌগিক গড় ও সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য নীচের ছকটি তৈরি করা হল—

নম্বর	ছাত্রসংখ্যা (f)	মধ্যমান (x)	x – A (A = 35)	$y = \frac{x-A}{i}$ (i = 10)	fy	fy^2
0 – 10	28	5	– 30	– 3	– 84	252
10 – 20	32	15	– 20	– 2	– 64	128
20 – 30	40	25	– 10	– 1	– 40	40
30 – 40	50	35 = A	0	0	00	00
40 – 50	24	45	10	1	24	24
50 – 60	16	55	20	2	32	64
60 – 70	10	65	30	3	30	90
মোট	n = 200	—	—	—	– 102	598

$\therefore$ যৌগিক গড় $(\bar{x}) = A + i \times \left(\frac{\sum fy}{n}\right) = 35 + 10 \times \left(\frac{-102}{200}\right)$

$= 35 - \frac{51}{10} = 35 - 5.1 = 29.9$

সম্যক বিচ্যুতি = $(S.D)_y = \sqrt{\frac{\sum fy^2}{n} - \left(\frac{\sum fy}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{598}{200} - \left(\frac{-102}{200}\right)^2}$

$= \sqrt{2.99 - 0.9601} = \sqrt{2.7299} = 1.652241 = 1.65$ (প্রায়)

$\therefore$ $(S.D)_x = i \times (S.\ D)_y = 10 \times 1.65 = 16.5$

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় ও সম্যক বিচ্যুতি যথাক্রমে 29.9 ও 16.5।

4.2.2 বিস্তৃতির পরম পরিমাণসমূহের তুলনামূলক আলোচনা

সমস্ত বিস্তৃতির পরম পরিমাপসমূহ সুসংজ্ঞাত। তবে প্রসারে ক্ষেত্রে প্রান্তীয় শ্রেণীবিভাগদ্বয়ের মধ্যে কমপক্ষে একটি মুক্ত (open) হলে এটি অর্থহীন হয়। চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয়ে রাশিতথ্যমালার প্রত্যেকটি রাশি ব্যবহৃত হয় না এবং বীজগণিতের সহজ নিয়মাবলী প্রয়োগের ক্ষেত্রে ইহার ব্যবহার সুবিধাজনক নয়। বাস্তবক্ষেত্রে ইহার ব্যবহার খুব সীমিত।

প্রসার সহজে নির্ণয় করা যায়। অন্য পরিমাপগুলোর ক্ষেত্রে গণনাকার্যের শ্রম প্রায় সমপরিমাণ আছে।

প্রসারের তাৎপর্য সহজবোধ্য। চতুর্থক বিচ্যুতি ও গড় বিচ্যুতিও বোধগম্য। কিন্তু সম্যক বিচ্যুতি কিছুটা জটিল।

গড় বিচ্যুতি ও সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ে রাশিতথ্যমালার সমস্ত রাশি ব্যবহৃত হয়। কিন্তু চতুর্থক বিচ্যুতির ক্ষেত্রে রাশিতথ্যমালার কিছু রাশি পরিবর্তন করলেও উহার মান অপরিবর্তিত থাকতে পারে। এই দিক থেকে প্রসার

সর্বনিম্নে। প্রসারের ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান দু'টি ঠিক রেখে বাকি সমস্ত রাশি পরিবর্তন করলেও উহার মান অক্ষত থাকে।

সম্যক বিচ্যুতির মান নিরূপণে বীজগণিতের সহজ নিয়মাবলীর প্রয়োগ সম্ভব। সেইজন্য পরিসংখ্যান শাস্ত্রের অন্যান্য বৈশিষ্ট্য পরিমাপক সংখ্যার মান নির্ণয়ে ইহার ব্যাপক প্রয়োগ হয়ে থাকে।

সম্যক বিচ্যুতির সাহায্যে দুই বা ততোধিক সংখ্যাশ্রেণীর মিলিত (combined) বিস্তৃতির পরিমাপ সম্ভব। অন্য কোনও পরিমাপকের সাহায্যে এইরকম পরিমাপ সম্ভব নয়।

এইজন্য সাধারণভাবে সম্যক বিচ্যুতিকে বিস্তৃতির সবচেয়ে ভালো পরিমাপক মনে করা হয়, যেমনভাবে যৌগিক গড়কে কেন্দ্রীয় প্রবণতার সবচেয়ে ভালো পরিমাপক মনে করা হয়।

4.3 বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপ সমূহ (Relative Measures of Dispersion)

মূল রাশিতথ্যমালা যে এককে দেওয়া থাকে, বিস্তৃতির পরম পরিমাপও সেই এককে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং, দুই বা ততোধিক রাশিতথ্যমালা যদি একই এককে প্রকাশিত হয়, তবে সহজেই বিস্তৃতির পরিমাপ পরম মানের সাহায্যে তুলনা করা যায়। কিন্তু দুই বা ততোধিক রাশিমালা যদি বিভিন্ন এককে প্রকাশিত থাকে, তবে বিস্তৃতির পরম মানের সাহায্যে উহাদের তুলনা করা যায় না। এই সকল ক্ষেত্রে বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপের সাহায্যে রাশিতথ্যমালাগুলি তুলনা করা যায়।

বিস্তৃতির কোনও পরম পরিমাপক কোনও কেন্দ্রীয় প্রবণতা মাপকের শতকরায় প্রকাশ করে বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপ (Relative measure) নির্ণয় করা হয়। এর ফলে রাশিতথ্যমালায় এককের ওপর ততোধিক রাশিতথ্যমালার বিস্তৃতির মধ্যে তুলনামূলক আলোচনা এর দ্বারা করা যায়। বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপগুলি হল ঃ

(i) চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক (Coefficient of Quartile Deviation)

(ii) গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক (Coefficient of Mean Deviation)

(iii) ভেদাঙ্ক (Coefficient of Variation)

(i) চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক (Coefficient of Quartile Deviation) :

$$\text{চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক} = \frac{\text{চতুর্থক বিচ্যুতি (Quartile Deviation)}}{\text{মধ্যমা (Median)}} \times 100\%$$

অর্থাৎ, কোন বিভাজনের প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক যথাক্রমে Q_1 ও Q_3 এবং মধ্যমা Q_2 হলে,

$$\text{চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক} = \frac{\frac{(Q_3 - Q_1)}{2}}{Q_2} \times 100\% = \frac{Q_3 - Q_1}{2Q_2} \times 100\%$$

উদাহরণ ১১. উদাহরণ ২-এর চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\therefore$ চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক = $\frac{16}{65.5} \times 100\% = 24.43\%$

(ii) গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক (Coefficient of Mean Deviation) :

গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক হল বিস্তৃতির একটি আপেক্ষিক পরিমাপ এবং ইহার সংখ্যা নিম্নরূপ :

$$\text{গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক} = \frac{\text{গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation)}}{\text{যৌগিক গড় বা মধ্যমা (Mean or Median)}} \times 100\%$$

উদাহরণ ১২. উদাহরণ (৫)-এর গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে যৌগিক গড় = 59.6 ও মধ্যমা = 60.5

গড় বিচ্যুতি = 20.4

$\therefore$ যৌগিক গড়ের সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক = $\frac{20.4}{59.6} \times 100\% = 34.23\%$

$\therefore$ মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক = $\frac{20.4}{60.5} \times 100\% = 33.72\%$

লক্ষনীয় যে, গড় বিচ্যুতি **সমান** হওয়া সত্ত্বেও যৌগিক গড় ও মধ্যমা ভিন্ন হওয়ার জন্য আপেক্ষিক গড় বিচ্যুতিদ্বয় ভিন্ন।

(iii) ভেদাঙ্ক (Coefficient of Variation) :

ভেদাঙ্ক হল বিস্তৃতির সর্বাপেক্ষা গুরুত্বপূর্ণ আপেক্ষিক পরিমাপ এবং ইহার সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

$$\text{ভেদাঙ্ক} = \frac{\text{সম্যক বিচ্যুতি (Standard Deviation)}}{\text{যৌগিক গড়}} \times 100\%$$

উদাহরণ ১৩. উদাহরণ ৮ -এর ভেদাঙ্ক (Coefficient of Variation) নির্ণয় করুন :

সমাধান : মধ্যক = 56 এবং সম্যক বিচ্যুতি = 6.36

$\therefore$ নির্ণেয় ভেদাঙ্ক = $\frac{6.36}{56} \times 100\% = 11.36\%$

4.4 অনুশীলনী

(১) একটি পরিসংখ্যা বিভাজনের উভয় প্রান্তিক শ্রেণীভুক্ত হলে বিভাজনটির বিস্তৃতির একটি উপযুক্ত মাপক দাও।

(২) কোনও চলকের মানগুলিকে যদি 10 দিয়ে ভাগ করা হয়, তবে সম্যক বিচ্যুতি কী পরিবর্তন হবে?

(৩) সকল প্রকার বিস্তৃতির মধ্যে কোন্‌গুলি বেশি ব্যবহৃত হয়?

(৪) আপেক্ষিক বিস্তৃতিগুলির মধ্যে কোন্‌টি বেশী ব্যবহৃত হয়?

(৫) বিস্তৃতির পরিমাপ বলতে কী বোঝ? বিস্তৃতির বিভিন্ন পরিমাপ আলোচনা করুন।

(৬) বিস্তৃতির পরম ও আপেক্ষিক পরিমাপের মধ্যে পার্থক্য উদাহরণ সহযোগে আলোচনা করুন।

(৭) বিস্তৃতির পরিমাপক হিসাবে প্রসার, চতুর্থক বিচ্যুতি, গড় বিচ্যুতি ও সম্যক বিচ্যুতির পারস্পরিক সুবিধা সম্বন্ধে আলোচনা করুন।

(৮) প্রসার, চতুর্থক বিচ্যুতি, গড় বিচ্যুতি (যৌগিক গড় ও মধ্যমার সাপেক্ষে) এবং সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

(i) 27, 33, 48, 63, 76, 104, 126

(ii) 24, 35, 51, 65, 78, 106, 129

(৯) নিম্নলিখিত তথ্য হতে গড় বিচ্যুতি (যৌগিক গড় সাপেক্ষে) এবং সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

নম্বর	0–10	10 –20	20–30	30–40	40–50
ছাত্রসংখ্যা	10	16	30	32	12

(১০) নিম্নলিখিত তথ্য হতে চতুর্থক বিচ্যুতি এবং সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন :

বেতন	30 – 34	34 – 38	38–42	42 – 46
শ্রমিক সংখ্যা	30	30	20	10

একক 5 ❑ সহগতি ও নির্ভরন (Correlation and Regression)

গঠন

5.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়বার পর আপনি জানতে পারবেন—

- দ্বিচল রাশিতথ্য কী?
- বিক্ষেপণ চিত্র কাকে বলে?
- সহগাঙ্ক কী ও তার ধর্ম।
- নির্ভরনতত্ত্ব কাকে বলে ও তার ধর্ম কী কী?

5.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী কয়েকটি অধ্যায়ে একটি চলকের ভিত্তিতে কীভাবে পরিসংখ্যা বিভাজন গঠন করতে হয় এবং তার বৈশিষ্ট্যগুলি নির্ণয় করা যায় সে সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু ব্যবসা ও অন্যান্য অনুসন্ধান ক্ষেত্রে অনেক সময় দুই বা ততোধিক চলক সম্পর্কে রাশিতথ্য বিশ্লেষণ করা প্রয়োজন হয়। সেই রাশিতথ্যের ভিত্তিতে দুইটি চলরাশির পারস্পরিক সম্পর্ক সম্বন্ধে কী জানা যায় তা এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে। উদাহরণস্বরূপ, আয়-ব্যয়, আয়-সঞ্চয়, চাহিদা-মূল্য, যোগান-দাম, মুনাফা-উৎপাদন, মুনাফা-বিক্রয়, ক্রয়-বিক্রয়, বিক্রয়-বিজ্ঞাপন, চাহিদা-যোগান ইত্যাদি। এ ধরনের দ্বিচল ভিত্তিক রাশিতথ্য থেকে প্রধানত দুটি সমস্যা সমাধানের চেষ্টা করা হয়।

প্রথমত, এদের মধ্যে কোনও পারস্পরিক সম্পর্ক আছে কিনা এবং তা থাকলে তাদের সম্পর্কের প্রকৃতি ও গভীরতা পরিমাপ করার চেষ্টা করা। তাদের মধ্যে সরলরেখা ভিত্তিক বা অন্য কোনও বক্ররেখা ভিত্তিক সম্পর্ক আছে কিনা দেখা। এই ঘনিষ্ঠতার প্রকৃতি ও তা কতখানি গভীর তার বিশ্লেষণ হয় সহগতির সাহায্যে।

দ্বিতীয়ত, দুটি চলকের মধ্যে একটির কোনও কিছু মান জানা থাকলে তার ভিত্তিতে অপরটি সম্পর্কে অনুমান করা অর্থাৎ, প্রথম চলকের উপর দ্বিতীয় চলকের একপ্রকার নির্ভরতা নির্ণয় করে তার সাহায্যে প্রথম চলকটির সাহায্যে দ্বিতীয় চলকটিকে অনুমান করা হয় 'নির্ভরন'-এর সাহায্যে।

5.2 দ্বিচলভিত্তিক রাশিতথ্য (Bivariate data)

এই জাতীয় রাশিতথ্যের প্রতিটি বস্তু বা ব্যষ্টির (item) জন দ্বিচল অর্থাৎ, দুটি চলকের সম্পর্কে তথ্য পাওয়া যায়। এখানে প্রথম চলকটিকে যদি x এবং দ্বিতীয় চলককে y ধরা হয়, তবে জোড়া সংখ্যা অর্থাৎ (x,y) মান দেওয়া থাকবে প্রতিটি ব্যষ্টির জন্য। ধরা যাক, এরকম n-জোড়া মান দেওয়া আছে। উদাহরণস্বরূপ, নিম্নে প্রদত্ত তথ্য সারণিটি (সারণি-1)। ধরা যাক, যেখানে দাম (x) এবং যোগান (y) সম্বন্ধে 10 জোড়া মান দেওয়া আছে।

সারণি—৫.১

দাম (টাকায়/কিলোগ্রাম)	10	12	18	16	15	191	18	17	21	23
যোগান (কুইন্টাল)	30	35	45	44	42	48	47	46	51	55

অনেক সময় এরকম জোড়া সংখ্যা যদি আরও বেশি সংখ্যক হয়, তবে এ ধরনের সারণি থেকে তথ্য নিষ্কাশন সমস্যা হবে, সেক্ষেত্রে আমরা দ্বিচলভিত্তিক পরিসংখ্যা বিভাজন গঠন করতে পারি। নিচের পরিসংখ্যা সারণিতে (সারণি-২) 100 টি পরিবারের মোট ব্যয় y এবং খাদ্য-সামগ্রীর ব্যয় (x)-এর ভিত্তিতে গঠিত একটি পরিসংখ্যা বিভাজন দেখনো হয়েছে, যেখানে x এবং y -এর যথাক্রমে 4টি ও 5টি শ্রেণী ব্যবহার করা হয়েছে। ফলে, সারণিটিতে 20টি পৃথক পৃথক কোষ ব্যবহার করা হয়েছে। এই কোষগুলির x এবং y -এর এক জোড়া নম্বর নিয়ে গঠিত এক একটি শ্রেণীর পরিসংখ্যা নির্দেশ করছে।

সারণি—৫.২

খাদ্য-সামগ্রীর ব্যয় ও পারিবারিক আয়ের বিভাজন

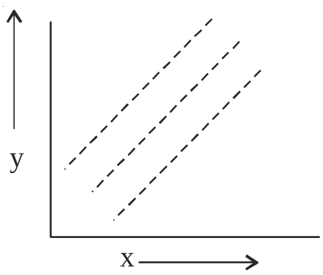
পারিবারিক আয় (টাকায়)

খাদ্য সামগ্রীর ব্যয় (শতাংশ)	2000–3000	3000–4000	4000–5000	5000–6000	6000–7000
10 – 15	—	—	—	3	7
15 – 20	—	4	9	4	3
20 – 25	7	6	12	5	—
25 – 30	3	10	19	8	—

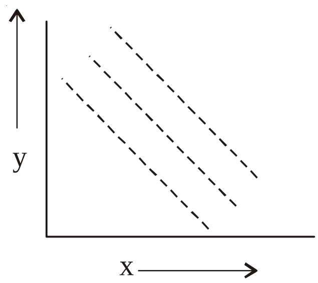
5.3 বিক্ষেপণ চিত্র (Scatter Diagram)

মনে করা যাক, দুটি চলকের সম্পর্কে n-জোড়া মান দেওয়া আছে। এখন রাশিবিজ্ঞান প্রয়োগ করে সহগতির পরিমাণ ও প্রকৃতি নির্ধারণ করা আমাদের উদ্দেশ্য। এই বিষয়ে বিক্ষেপণ চিত্রের অবদান যথেষ্ট। বিক্ষেপণ চিত্র আসলে n-সংখ্যক বিন্দুর একটি জ্যামিতিক চিত্র, যেখানে ঐ বিন্দুগুলি পাওয়া যাবে n সংখ্যক জোড়া মান থেকে। বিক্ষেপণ চিত্রই দুটি চলকের মধ্যে সহগতির পরিমাণ ও প্রকৃতি নির্দেশ করে। পরবর্তী পরিচ্ছেদে দেখা যাবে সহগাঙ্ক (Correlation coefficient) r_{xy} -এর সর্ব্বনিম্ন মান—1 এবং সর্বোচ্চ মান + 1 হয়।

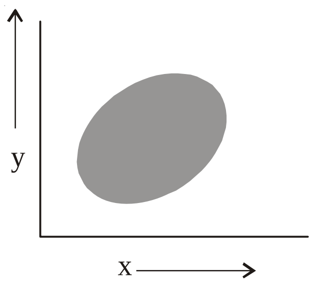
সাধারণভাবে একটি চলকের (x) -এর মান বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে যদি অন্য চলকের (y) মান বাড়তে থাকে অথবা একটি চলকের (x) মান বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে অন্য চলকের (y) মান কমতে থাকে, তবে বুঝতে হবে যে চলদ্বয়ের মধ্যে সহগতি আছে। প্রথম প্রকারের সহগতিকে ধনাত্মক সহগতি ও পরের সহগতিকে **ঋণাত্মক সহগতি** বলে। পক্ষান্তরে, একটি চলকের বৃদ্ধির সঙ্গে অন্যটির লক্ষণীয় বৃদ্ধি বা হ্রাসের কোন প্রবণতাই যদি না থাকে, তবে বলা হয় যে চলদ্বয়ের মধ্যে কোনও সহগতি নেই। এক্ষেত্রে চলক দুটি সহগতি মুক্ত (Uncorrelated) বলা হয়। আবার চলক দুটির মধ্যে যে ধরনের সম্পর্কের কথা বলা হচ্ছে তা মোটামুটিভাবে সরলরেখা সূত্রে প্রকাশযোগ্য। অর্থাৎ দুটি চলকের সহগতি হচ্ছে তাদের একটির পরিবর্তনে অন্যটির সরলরৈখিক পরিবর্তনশীলতা। ধনাত্মক সহগতির ক্ষেত্রে r_{xy}-এর মান ধনাত্মক হয়। অনুরূপে, ঋণাত্মক সহগতির ক্ষেত্রে r_{xy} -এর মান ঋণাত্মক হয়। পক্ষান্তরে, অ-সহগতির ক্ষেত্রে r_{xy}-এর মান শূন্য হয়। এই যে তিনপ্রকার সহগতির কথা বলা হয়েছে তার প্রতিটি ক্ষেত্রে বিক্ষেপণ চিত্রের আকার যে ধরনের হয় তা নিচের চিত্রে দেখান হল—



ধনাত্মক সহগতি

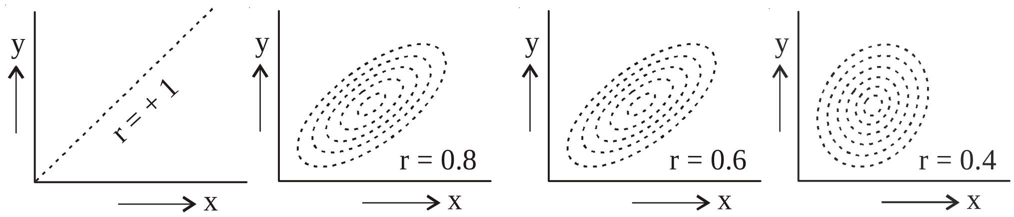


ঋণাত্মক সহগতি



অ-সহগতি

সহগতির মানের ওপর নির্ভর করে তার ঘনিষ্ঠতার পরিমাণ। উদাহরণ হিসাবে ধনাত্মক সহগতির কথা ধরা যাক অর্থাৎ r_{xy} -এর মান যখন 0 থেকে বাড়তে বাড়তে 1 পর্যন্ত হয়, তখন ঘনিষ্ঠতার যে পরিবর্তন করা হয় তা জ্যামিতিক চিত্রে নিচে দেখানো হল।



চিত্রটি থেকে পরিষ্কার বোঝা যাচ্ছে, r_{xy}-এর মান যতই 0 থেকে 1-এর দিকে যাচ্ছে ততই চলরাশি দু'টির মধ্যে ঘনিষ্ঠতা বাড়ছে। অনুরূপে, ঋণাত্মক সহগতির মানও যখন 0 থেকে কমতে কমতে –1 এর দিকে যায়, তখন ঘনিষ্ঠতাও ক্রমে বাড়তে থাকে। সহগতি সূচকের মান যখন +1 অথবা –1 হয়, তখন সমস্ত বিক্ষিপ্ত বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থান করে।

5.4 সহগাঙ্ক (Correlation)

মনে কর, দুটি চলক (x, y)-এর প্রত্যেকের n-সংখ্যক মান হল (x_1, y_1), (x_2, y_2),......... (x_n, y_n)। এদের মধ্যে (x_i, y_i) হচ্ছে i-তম ব্যক্তির x এবং y-এর মান। x এবং y-এর মধ্যে কার্ল পিয়ারসন (Karl Pearson)-এর সহগাঙ্কের সংজ্ঞা (যা r_{xy} দিয়ে চিহ্নিত করা হয়) হল,

$$\text{সহগাঙ্ক} = \frac{x \text{ ও } y\text{-এর সহভেদমান}}{\sqrt{x\text{-এর ভেদমান} \times y\text{-এর ভেদমান}}}$$

এখানে দু'টি চলরাশি x এবং y-এর সহভেদমান (Covariance) হল ভেদমান-এর অনুরূপ পরিমাপ। কিন্তু ভেদমান যেমন একটি চলকের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, সহভেদমান তেমন দুটি চলকের সহবিচ্যুতি পরিমাপের জন্য প্রয়োজ্য।

সুতরাং,

$$\text{সহগাঙ্ক } (r_{xy}) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum y_i^2 - \bar{y}^2}}$$

$$= \frac{\sum x_i y_i - n.\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}\ \sqrt{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\cdot\bar{y}}{s_x \cdot s_y}$$

5.4.1 সহগাঙ্ক (r_{xy})-এর কয়েকটি ধর্ম (Properties of Corrclation Coefficient, r_{xy})

(i) সহগাঙ্ক (r_{xy}) একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা অর্থাৎ x এবং y যে একক দিয়েই প্রকাশ করা হোক না কেন, সহগাঙ্ক তার প্রভাব থেকে সম্পূর্ণ মুক্ত।

(ii) সহগাঙ্ক, r_{xy}-এর সর্বনিম্ন মান – 1 এবং সর্বোচ্চ মান + 1 অর্থাৎ, $-1 \le r_{xy} \le +1$

প্রমাণ : মনে কর, x ও y দুইটি চলক এবং $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots\ldots\ldots (x_n, y_n)$ উহাদের n-জোড়া মান। $\bar{x}$, $\bar{x}$ উহাদের গড়দ্বয় এবং s_x, s_y উহাদের সম্যক বিচ্যুতিদ্বয়।

মনে করো, $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$ এবং $v_i = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$

তাহলে, $\sum u_i^2 = \sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{s_x^2} = \frac{ns_x^2}{s_x^2} = n$

অনুরূপ, $\sum v_i^2 = \sum\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)^2 = n$

আবার, $\sum v_i u_i = \sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_1 - \bar{y})}{s_x s_y} = \frac{nr_{xy}s_x s_y}{s_x \cdot s_y} = n.r_{xy}$

যেহেতু $(u_i + v_i)^2$ কখনও ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই $\sum(u_i + v_i)^2 \ge 0$

$$\sum(u_i + v_i)^2 \ge 0$$

বা, $\sum u_i^2 + \sum v_i^2 + 2\sum u_i v_i \ge 0$

বা, $n + n + 2nr_{xy} \ge 0$

বা, $r_{xy} \geq -1$ .... (*)

অনুরূপে, যেহেতু $(u_i - v_i)^2$ কখনও ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই

$$\sum(u_i - v_i)^2 \geq 0$$

বা, $\sum u_i^2 + \sum v_i^2 - 2\sum u_i v_i \geq 0$

বা, $n + n - 2nr_{xy} \geq 0$

বা, $r_{xy} \leq 1$ ... (**)

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1$$

(iii) x ও y-এর মূলবিন্দু ও মাত্রার (Origin and Scale) পরিবর্তনে সহগাঙ্ক (r_{xy})-এর মানের পরিবর্তন হয় না, যদি মাত্রাদ্বয় সমচিহ্ন বিশিষ্ট হয়। যদি মাত্রাদ্বয় বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয়, তবে নতুন চলদ্বয়ের সহগাঙ্ক পূর্বোক্ত সহগাঙ্কের বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।

অর্থাৎ যদি $u = \frac{x-a}{b}$ এবং $v = \frac{y-c}{d}$ হয় তবে,

$r_{uv} = r_{xy}$ যদি b ও d একই চিহ্নবিশিষ্ট হয়।

$= -r_{xy}$ যদি b ও d বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়।

প্রমাণ : মনে করে, x ও y দুটি চলক ও $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n)$ উহাদের n-জোড়া মান। এখন x ও y-এর মূল a ও c বিন্দুতে এবং মাত্রাদ্বয় b ও d পরিমাণ পরিবর্তন করা হল।

তাহলে, $u_i = \frac{x_i - a}{b}$ এবং $v_i = \frac{y_i - c}{d}$ .... (A)

(A) থেকে পাই, $x_i = a + bu_i$ এবং $y_i = c + dv_i$

তাহলে, $\overline{x} = a + b\overline{u}$ এবং $\overline{y} = a + d\overline{v}$

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum(a + bu_i - a - b\overline{u})^2 = \frac{b^2}{n}\sum(u_1 - \overline{u})^2 = b^2 s_u^2$$

$\therefore \quad s_x = |\, b \,| s_u$

অনুরূপে, $s_y = |d| s_v$

এখন, $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum(a + bu_i - a - b\bar{u})(c + dv_i - c - d\bar{v})$

$$= bd\frac{1}{n}\sum(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$$

$$\therefore \quad r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_1 - \bar{y})}{s_x s_y}$$

$$= \frac{bd}{|b|\cdot|d|}\cdot\frac{\frac{1}{n}\sum(u_i - \bar{u})(v_1 - \bar{v})}{s_u \cdot s_v}$$

$$= \frac{bd}{|b|\cdot|d|}\cdot r_{uv}$$

$$\therefore r_{uv} = \frac{|b|\cdot|d|}{bd}\cdot f_{xy}$$

$\therefore r_{uv} = r_{xy}$ যদি b ও d সমচিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

$= -r_{xy}$ যদি b ও d বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়।

উদাহরণ ১. কোনও বাজারে পরপর ৪ সপ্তাহে আলুর দর (x) ও বিক্রয় পরিমাণ (y) সংক্রান্ত তথ্য দেওয়া আছে। দর ও বিক্রয় পরিমাণের মধ্যে সহগাঙ্কের মান নির্ণয় কর এবং তোমার মতামত দিন।

x (টাকা/কেজি)	5.2	6.3	6.8	6.5	5.8	5.4	6.0	6.5
y (কুইন্ট্যাল)	19.4	17.0	15.1	16.2	17.8	19.5	16.5	15.2

সমাধান : সহগাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য গণনা কার্য :

সপ্তাহ	কেজি প্রতি দর (টাকায়) (x_i)	বিক্রয় পরিমাণ (কুঃ) (y_i)	$u_i = x_i - 6$	$v_i = y_i = 18$	u_1^2	v_1^2	u_iv_i
1	5.2	19.4	– 0.8	1.4	0.64	1.96	– 1.12
2	6.3	17.0	0.3	– 1.0	0.09	1.00	– 0.30
3	6.8	15.1	0.8	– 2.9	0.64	8.41	– 2.32
4	6.5	16.2	0.5	– 1.8	0.25	3.24	– 0.90
5	5.8	17.8	– 0.2	– 2.0	0.04	0.04	0.04
6	5.4	19.5	– 0.6	1.5	0.36	2.25	– 0.90
7	6.0	16.5	0.0	– 1.5	0.00	2.25	– 0.00
8	6.5	15.2	0.5	– 2.8	0.25	7.84	– 1.40
মোট	—	—	0.5	– 7.3	2.27	26.99	– 6.90

যদি x ও y -এর সহগাঙ্ক r_{xy} হয়, তবে

$$r_{xy} = r_{uv} = \frac{n\sum u_i v_i - \left(\sum u_i\right)\left(\sum v_i\right)}{\sqrt{\left\{n\sum u_i^2 - \left(\sum u_i\right)^2\right\}\left\{n\sum v_i^2 - \left(\sum v_i\right)^2\right\}}}$$

$$= \frac{8\times(-6.9)-(0.5)(-7.3)}{\sqrt{\left\{8\times 2.27-(0.5)^2\right\}\left\{8\times 26.99-(-7.3)^2\right\}}}$$

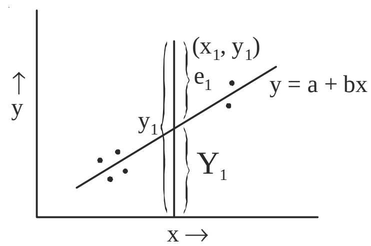
$$= \frac{51.55}{4.232\times 12.753} = -0.955$$

নির্ণেয় সহগাঙ্কের মান খুব বেশি, আবার উহার ধনাত্মক বলে এটা স্পষ্ট যে, আলুর কেজি প্রতি দর বাড়লে বিক্রয় পরিমাণ কমবে এবং চলক দুটির সম্পর্ক ঋণাত্মক ঢাল সহ প্রায় ঋজুরৈখিক।

5.5 নির্ভরন তত্ত্ব (Regression Theory)

অনেক সময় দেখা যায়, দুটি চলকের মধ্যে একটি অপরটির ওপর কোনও না কোনভাবে নির্ভরশীল। যেমন—মুনাফার পরিমাণ নির্ভর করে বিক্রয়ের পরিমাণের ওপর। কোনও পরিবারে ব্যয় নির্ভর করে পরিবারের মোট আয়ের ওপর ইত্যাদি। এই নির্ভরশীলতার কথা মনে রেখে, যে চলকটি অপর চলকটির ওপর নির্ভর করছে সেটিকে নির্ভরী বা অধীন চলক (dependent variable) এবং অপরটি স্বনির্ভর বা অনপেক্ষ বা স্বাধীন চলক (independent variable) বলে। এই নির্ভরতার পরিপ্রেক্ষিতে স্বনির্ভর চলকটির মান সম্পর্কে কোনও জ্ঞাত তথ্য থেকে নির্ভরী চলকটির মান সম্পর্কে রাশিবিজ্ঞান সম্মত ও নির্ভরযোগ্য কোনও অনুমান করা যায় কিনা সেটাই আমাদের প্রধান উদ্দেশ্য।

মনে কর, x হচ্ছে একটি স্বাধীন বা অনপেক্ষ চলক ও y আর একটি চলক। এখন x এবং y-এর নির্ভরতা অনুমান করার উপায় হচেছ x-এর মানের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে y-এরও মানের পরিবর্তন হচ্ছে কিনা দেখা। যদি চলকদ্বয়ের মধ্যে মোটামুটি সরলরৈখিক সম্পর্ক থাকে তবে আমরা বলি উহাদের মধ্যে সরল নির্ভরন (Simple regression) আছে। যদিও প্রকৃত নির্ভরনের স্বরূপটি অনুমান করা বেশ কঠিন, y = a + bx, যেখানে a ও b দুটি ধ্রুবক, রেখাটিকে x-এর উপর y-এর নির্ভরণ রেখা হিসাবে ধরা যেতে পারে।



উপরোক্ত বিক্ষেপণ চিত্রটি দেখে আমরা x-এর উপর y -এর একটি নির্ভরণ সরলরেখা (Regression fine) নির্ণয় করছি। (x_i, y_i), i = 1, 2, ... n লেখচিত্রের মধ্যে বিক্ষিপ্ত বিন্দুগুলি হল (x, y) জোড়া মানের সম্পর্ক জ্ঞাত রাশি।

এখানে,

y_i = x-অক্ষের x_i স্থানে y-এর জ্ঞাত রাশি।

Y_i = x-অক্ষের x_i স্থানে y-এর অনুমিত রাশি।

এবং

$$y_i = Y_i + e_i$$
$$= a + bx_i + e_i \quad .... (1)$$

যেখানে, e_i হল x_i বিন্দুতে y-এর জ্ঞাত ও অজ্ঞাত রাশির মধ্যে দূরত্ব।

এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে, (1) নং সমীকরণে a এবং b দুটি অজ্ঞাত রাশি। কাজেই নমুনালব্ধ রাশিতথ্যের ভিত্তিতে এদের দুটি প্রাক্কলক (estimate) নির্ণয় করা দরকার। প্রাক্কলক নির্ণয়ে যে নীতি অনুসরণ করা হয় তাকে লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি (method of least squares) বলে। এই পদ্ধতিতে a ও b-এর মান এমনভাবে নির্ণয় করা হয় যাতে (x_i, y_i) এবং (x_i, Y_i) বিন্দুগুলির দূরত্ব সামগ্রিকভাবে কম হয়। অর্থাৎ a ও b এমনভাবে বেছে নেওয়া হয় যাতে

$$e^2 = \sum_{i=1}^{n} e_1^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

সর্বাপেক্ষা কম হয় এই হল লঘিষ্ঠ পদ্ধতি। এই পদ্ধতিতে যে দুটি মৌল বা সুসম্বদ্ধ সমীকরণ (Normal equatons) সমাধান করে a এবং b-এর মান নির্ণয় করা হয় সেগুলি হল :

$$\sum y_i = na + b\sum x_i \quad ... (2)$$

$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2 \quad ... (3)$$

সমীকরণ (2) ও (3)-এর a এবং b ছাড়া সমস্ত রাশি জানা আছে। তাই অতি সহজেই a এবং b-এর মান বের করা যাবে এবং সেগুলি হল :

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}.\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad ... (4)$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \quad ... (5)$$

$\hat{a}$ এবং $\hat{b}$ হল লঘিষ্ঠ গড় পদ্ধতিতে নির্ণয় করা a এবং b-এর প্রাককলিত (estimated) মান।

অনুরূপে, x যদি y-এর ওপর নির্ভরশীল চলক হয়, তবে আমরা y-এর উপর x-এর একটি নির্ভরন সরলরেখার কথা ভাবতে পারি। ধরা যাক, সেটি হল—

$x = c + dy$ .... (6)

এখন x-এর জ্ঞাত রাশির সাথে অনুমিত রাশির দূরত্ব নিয়ে সেগুলির উপর লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি প্রয়োগ করে c এবং d-এর প্রাক্কলক নির্ণয় করা যাবে এবং সেগুলি হল—

$$\hat{d} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2} \quad .... (7)$$

এবং $\hat{c} = \bar{x} - \hat{d}\bar{y}$ .... (8)

5.5.1 নির্ভরনের কয়েকটি ধর্ম

(a) (i) x-এর উপর y-এর অনুমিত নির্ভরন সরলরেখাটির সমীকরণ হল :

$$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x}) \quad .... (9)$$

যেখানে b_{yx} হল x-এর উপর y-এর নির্ভরাঙ্ক এবং

$$b_{yx} = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x^2} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \quad .... (10)$$

(ii) y-এর উপর x-এর অনুমিত নির্ভরন সরলরেখার সমীকরণ হল :

$$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y}) \quad .... (11)$$

যেখানে b_{xy} হল y-এর উপর x-এর নির্ভরাঙ্ক

এবং $b_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_y^2} = \frac{\sum x_i, y_i - n\bar{x}.\bar{y}}{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}$ .... (12)

(b) r_{xy}, b_{xy} এবং b_{yx}-এর চিহ্ন সর্বদা একই হয়।

(c) $b_{xy} \times b_{yx} = r^2_{xy}$

(d) x-এর উপর y-এর এবং y-এর উপর x-এর নির্ভরন সরলরেখা দুটি $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(d) যখন $r_{xy} = \pm 1$, তখন নির্ভরন সরলরেখা দুটি অভিন্ন রেখাতে রূপান্তরিত হয়।

(f) যখন $r_{xy} = 0$, তখন নির্ভরন সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হয়। অর্থাৎ একটি চলক অপর চলকের দ্বারা কোনওভাবেই প্রবাবিত হয় না।

উদাহরণ ২. নিম্নলিখিত রাশিতথ্য থেকে নির্ভরন সরলরেখা দুটি নির্ণয় কর।

বিক্রয়মূল্য (টাকায়)	91	97	108	121	67	124	51	73	111	57
ক্রয়মূল্য (টাকায়)	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

সমাধান : মনে কর, বিক্রয়মূল্যকে x-চলক ও ক্রয়মূল্যকে y-চলক দ্বারা প্রকাশ করা হল :

নির্ভরন সরলরেখা নির্ণয়ের গণনা কার্য :

x	y	$u = x - \bar{x}$	$v = y - \bar{y}$	u^2	v^2	uv
91	71	1	1	1	1	1
97	75	7	5	49	25	35
108	69	18	– 1	324	1	– 18
121	97	31	27	961	729	837
67	70	– 23	0	529	0	0
124	91	34	21	1156	441	714
51	39	– 39	– 31	1521	961	1209
73	61	– 17	– 9	289	81	153
111	80	21	10	441	100	210
57	47	– 33	– 23	1084	529	759
মোট 900	700	0	0	6360	2868	3900

এখন $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{900}{10} = 90$ এবং $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{700}{10} = 70$

$$b_{yx} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2} = \frac{\sum uv}{\sum u^2} = \frac{3900}{6360} = 0.6132$$

$$b_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(x-\bar{y})}{\sum(y-\bar{y})^2} = \frac{\sum uv}{\sum v^2} = \frac{3900}{2868} = 1.361$$

এক্ষণে, x-এর উপর y-এর নির্ভরন সরলরেখাটি হল :

$$y = \bar{y} + b_{yx}(x - \bar{x})$$

$$= 70 + 0.6132\ (x - 90)$$

$$= 14.812 + 0.6132x$$

এবং y-এর উপর x-এর নির্ভরন সরলরেখাটি হল :

$$x = \bar{x} + b_{xy}(y - \bar{y}) = 90 + 1.361\ (y - 70) = - 5.27 + 1.361\ y$$

উদাহরণ ৩. নীচে 7টি শহরে লোকসংখ্যা (x)-এর টি.ভি. সেটের চাহিদা (y)-এর তথ্য দেওয়া হল। x-এর উপর y-এর নির্ভরন সরলরেখাটি নির্ণয়কর। যে শহরের লোকসংখ্যা 30 হাজার, যেখানে অনুমিত কতকগুলি টি. ভি. সেটের চাহিদা থাকবে?

লোকসংখ্যা (x) ('000)	11	14	14	17	17	21	25
টি. ভি. সেটের চাহিদা (y) ('00)	15	27	27	30	34	38	46

সমাধান : x-এর উপর y-এর নির্ভরন সরলরেখা নির্ণয়ের জন্য গণনা কার্য :

শহর	x_i	y_i	$u_i = x_i - \bar{x}$	$v_i = y_i - \bar{y}$	u_i^2	$u_i v_i$
1	11	15	6	– 16	36	96
2	14	27	– 3	– 4	9	12
3	14	27	– 3	– 4	9	12
4	17	30	0	– 1	0	0
5	17	34	0	3	0	0
6	21	38	4	7	16	28
7	25	46	8	15	64	120
মোট	119	217	0	0	134	268

এখন, $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{119}{7} = 17$ এবং $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{217}{7} = 31$

$$b_{yx} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum u_i v_i}{\sum u_i^2} = \frac{268}{134} = 2$$

এক্ষেত্রে x-এর উপর y-এর নির্ভরন সরলরেখাটি হল,

$y = \bar{y} + b_{yx}(x - \bar{x})$

= 31 + 2(x – 17)

= – 3 + 2x

তাহলে, x = 30 হলে, y-এর অনুমিত মান হবে,

y = – 3 + 2 × 30 = 57

সুতরাং, 30 হাজার লোকসংখ্যা বিশিষ্ট শহরে অনুমিত 5700 টি. ভি. সেটের চাহিদা থাকবে।

উদাহরণ ৪ : x -চলকের ভেদমান 9 এবং নির্ভরনের সমীকরণদ্বয় 8x – 10y + 66 = 0 এবং 40x – 18y = 214 হলে, (i) x এবং y-এর গড় (ii) x ও y -এর সহগাঙ্ক এবং (iii) y চলকের প্রমাণ বিচ্যুতির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : (i) আমরা জানি, নির্ভরনের সমীকরণদ্বয় $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় সমাধান করে x ও y-এর গড় মান অর্থাৎ $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ -এর মান পাওয়া যাবে।

এখানে সমীকরণদ্বয় হল :

8x – 10y + 66 = 0 বা, 4x – 5y = – 33 ... (1)

40x – 18y = 214 বা, 20x – 9y = 107 ... (2)

(2) কে (1) **সমীকরণের** 5 গুণ থেকে বিয়োগ করে,

$$\begin{array}{l} 20x - 25y = -165 \\ 20x - 9y = +107 \\ \underline{\;-\qquad +\qquad -\;} \\ -16y = -272 \end{array}$$

বা, y = 17

এখন y-এর মান (1) -এ বসিয়ে পাই,

4x – 5 × 17 = – 33

বা, x = 13

সুতরাং, x ও y চলকদ্বয়ের গড় মান যথাক্রমে 13 ও 17.

(ii) সমীকরণ (1) থেকে পাই,

$$y = \frac{4x}{5} + \frac{33}{5} \text{ ...... } (3)$$

এবং সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$$x = \frac{9y}{20} + \frac{107}{20} \quad \text{... } (4)$$

মনে কর, সমীকরণ (3) হল x-এর উপর y-এর নির্ভরন সরলরেখা এবং সমীকরণ (4) হল y-এর উপর x-এর নির্ভরন সরলরেখা।

তাহলে, $b_{yx} = \frac{4}{5}$ এবং $b_{xy} = \frac{9}{20}$

সুতরাং, x এবং y-এর সহগাঙ্ক-এর বর্গ অর্থাৎ $r_{xy}^2 = b_{yx} \times b_{xy} = \frac{4}{5} \times \frac{9}{20} = \frac{9}{25}$

অর্থাৎ, $r_{xy} = \pm\frac{3}{5} = \pm 0.6$

যেহেতু b_{xy} এবং b_{yx} উভয়েই ধনাত্মক, তাই r_{xy} এর মান ধনাত্মক হবে।

সুতরাং নির্ণেয় সহগাঙ্ক (r_{xy})-এর মান 0.6

(iii) x-এর ভেদমান 9, প্রদত্ত

আবার, $b_{yx} = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$

বা, $\frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{s_y}{3}$ [$\therefore$ $s_y^2 = 9$ অর্থাৎ $s_x = 3$]

বা, $s_y = 4$

সুতরাং, y-এর প্রমাণ বিচ্যুতি হল 4।

5.6 মানক্রমিক সহগতি (Rank Correlation)

কোনও কোনও সময় দেখা যায়, যে দুটি ভিন্ন চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করতে হবে সেগুলি সবসময় সংখ্যা যোগে পরিমাপযোগ্য নয়, কিন্তু মানক্রমিক (rank)-এ সাজানো যায়। যেমন—শিক্ষার মান—সততা, প্রতিভা—শিল্পবোধ, শিক্ষারমান—আদর্শ ইত্যাদি চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যগুলি সংখ্যা দিয়ে পরিমাপ যোগ্য নয়, কিন্তু এগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজানো সম্ভব। এইসকল ক্ষেত্রে কার্ল পিয়াসন-এর সহগাঙ্ক-এর সাহায্যে বৈশিষ্ট্য দুটির মধ্যে সংস্রব পরিমাপ অসম্ভব। এক্ষেত্রে আমরা একটি নতুন ধরনের মাপনাঙ্ক (Coefficient) ব্যবহার করে এদের মধ্যে সংস্রব পরিমাপের চেষ্টা করি। এরকম মাপনাঙ্ককে মানক্রমিক সহগাঙ্ক (Rank Correlation) বলা হয়। এই পরিচ্ছেদে, ব্রিটিশ সংখ্যাতত্ত্ববিদ স্পিয়ারম্যান (Spearman)-এর মানক্রমিক সহগাঙ্কের বিষয় বিশদভাবে আলোচনা করা করা হবে।

মনে কর, A ও B দুটি চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য n-সংখ্যক বিচ্ছিন্ন ব্যষ্টির মধ্যে ভিন্ন ভিন্ন মাত্রায় আছে, যাদের মানের ক্রমানুসারে সাজানো যায়। অর্থাৎ n-সংখ্যক ব্যষ্টির মধ্যে A চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যটি কার মধ্যে সবচেয়ে বেশি আাছে, তার পরবর্তীমাত্রায় কার মধ্যে আছে ইত্যাদি এবং সবশেষে কার মধ্যে সবচেয়ে স্বল্পমাত্রায় আছে তা নির্ণয় করা যায়। সেইমতো সর্বোচ্চ মাত্রাধিকারীকে 1 পরবর্তী মাত্রাধিকারীকে 2 ইত্যাদি এবং সর্বনিম্ন মাত্রাধিকারীকে মানক্রম -n দেওয়া হল। তাহলে কোনও ব্যষ্টিকে মানক্রম *i* আরোপ করা হবে যদি (i – 1) সংখ্যক ব্যষ্টির মধ্যে A চরিত্রটি অধিকতর মাত্রায় থাকে; *i* = 1, 2, 3 ....n। মনে কর, A-এর চরিত্রানুযায়ী, n-সংখ্যক ব্যষ্টির অনুক্রম মান হল u_1, u_2, ... u_n ; এখানে u_i (i = 1, 2.........n) হচ্ছে 1, 2, 3,............n-এর মধ্যবর্তী যে কোনও একটি সংখ্যা এবং $i \neq j$ হলে $u_i \neq u_j$ হবে। অনুরূপভাবে, B-এর চরিত্রানুযায়ী, ঐ n-সংখ্যক ব্যক্তির মানক্রম যথাক্রমে v_1, v_2, ...v_n ; যেখানে v_i (i = 1, 2, ...n) সংখ্যাটিও 1, 2, 3,........... n-এর মধ্যবর্তী একটি সংখ্যা এবং $i \neq j$ হলে $v_i \neq v_j$ হবে। এখন A ও B বৈশিষ্ট্য দুটির মানক্রমিক সহগাঙ্ক (Rank Correlation) যদি আমরা R দিয়ে চিহ্নিত করি, তবে $R = \frac{\text{cov}(u,v)}{\sqrt{\text{var}(u).\text{var}(v)}}$ ...... (13)

$$= \frac{\text{u ও v-এর সহ-ভেদমান}}{\sqrt{\text{u -এর ভেদমান} \times \text{v-এর ভেদমান}}}$$

এখন স্পিয়ারম্যানের মানক্রমিক সহগাঙ্ক হল,

$$R = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n\left(n^2 - 1\right)} \quad \ldots (14)$$

যেখানে $d_i = u_i - v_i$; $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$

যদি দেখা যায় $u_i = v_i$ হয়, প্রত্যেক $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n$, -এর জন্য, তবে $R = 1$ অর্থাৎ A ও B বৈশিষ্ট্য দু'টি ধনাত্মকভাবে সম্পূর্ণ সংস্রবযুক্ত। পক্ষান্তরে যদি $v_i = n - u_i + 1$ হয় প্রত্যেক $i = 1,2, \ldots\ldots. n$ এরজন্য, $R = -1$ অর্থাৎ, A ও B চরিত্র দু'টি ঋণাত্মকভাবে সম্পূর্ণ সংস্রবযুক্ত।

মানক্রমিক সহগতির যে সূত্র (14)-এ দেওয়া হয়েছে তাতে উভয় চরিত্রানুযায়ীই প্রত্যেকটির ব্যষ্টির মানক্রম পরস্পর পৃথক। কিন্তু কখনো এমন কখনো হতে পারে যে একাধিক ব্যষ্টি ঠিক সমপরিমাণে কোনও চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যের অধিকারী। সেক্ষেত্রে ঐ সকল ব্যষ্টির প্রত্যেককে একই অনুক্রম মান আরোপ করা উচিত। এরকম হলে বলা হয় যে, ঐ ব্যষ্টিগুলির মধ্যে ঐ চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য অধিকারের ব্যাপারে সমতা বা সম মানক্রম (tie) সৃষ্টি হয়েছে। সেক্ষেত্রে স্পিয়ারম্যানের মানক্রমিক সহগাঙ্ক হল,

$$R = \frac{\frac{n^2 - 1}{12} - \frac{T_u + T_v}{2} - \frac{1}{2n}\sum d_i^2}{\sqrt{\frac{n^2 - 1}{12} - T_u}\sqrt{\frac{n^2 - 1}{12} - T_v}} \quad \ldots. (15)$$

যেখানে, $T_u = \sum_{j=1}^{r} \frac{t\left(t^2 - 1\right)}{12n}$

$$T_v = \sum_{j=1}^{s} \frac{t'\left(t'^2 - 1\right)}{12n}$$

$t_1, t_2 \ldots\ldots.., t_r$ হল u চলকে r টি সমমানক্রমের দৈর্ঘ্য ও $t'_1, t'_2, \ldots\ldots\ldots\ldots. t'_s$ হ'ল v-চলকে sটি সমমানক্রমের দৈর্ঘ্য।

উদাহরণ : ৫. 15 জন ছাত্রের দুটি বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের মানক্রমানুপাতগুলি নিম্নরূপ :
বিষয় দুটির মানক্রমিক সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন।

ক্রমিক সংখ্যা	A বিষয়ে মানক্রম	B বিষয়ে মানক্রম
1	1	10
2	2	7
3	3	2
4	4	6
5	5	4
6	6	8
7	7	3
8	8	1
9	9	11
10	10	15
11	11	9
12	12	5
13	13	14
14	14	12
15	15	13

সমাধান : মানক্রমিক সহগাঙ্ক নির্ণয়ের গণনাকার্য :

A বিষয়ে মানক্রম (u_i)	B বিষয়ে মানক্রম (v_i)	$d_i = u_i - v_i$	d_i^2
1	10	– 9	81
2	7	– 5	25
3	2	1	1
4	6	– 2	4
5	4	1	1
6	8	– 2	4
7	3	4	16
8	1	7	49
9	11	– 2	4
10	15	– 5	25
11	9	2	4
12	5	7	49
13	14	– 1	1
14	12	2	4
15	13	2	4
মোট	—	—	272

$$\therefore \quad R = 1 - \frac{6 \times 272}{15(225-1)} = 1 - \frac{17}{35}$$

$$= \frac{18}{35} = 0.51 \text{ (আসন্ন)}$$

উদাহরণ ৬. নিচের সারণিতে দশজন বিক্রয়কারীর মেধা পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বর এবং তাদের সাপ্তাহিক বিক্রয় (হাজার টাকায়) দেওয়া আছে। মানক্রমিক সহগতি নির্ণয় করুন।

বিক্রয়কারী	প্রাপ্ত নম্বর	বিক্রয় পরিমাণ (হাজার টাকায়)
1	50	25
2	70	60
3	50	45
4	60	50
5	80	45
6	50	20
7	90	55
8	50	30
9	60	45
10	60	30

সমাধান : মানক্রমিক সহগতি নির্ণয়ের গণনাকার্য :

বিক্রয়কারী	প্রাপ্ত নম্বরের মানক্রম (u)	বিক্রয়ের মানক্রম (v)	$d = u - v$	d^2
1	8.5	9	– 0.5	0.25
2	3	1	2.0	4.00
3	8.5	5	3.5	12.25
4	5	3	2.0	4.00
5	2	5	– 3.0	9.00
6	8.5	10	– 1.5	2.25
7	1	2	– 1.0	1.00
8	8.5	7.5	1.0	1.00
9	5	5	0.0	0.00
10	5	7.5	– 2.5	6.25
মোট	—	—	—	40.00

দুটি চরিত্র মিলে মোট 4 টি সমানুক্রম আছে। তাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে u-চলকে 4 এবং 3 আর v-চলকে যথাক্রমে 3 এবং 2।

অর্থাৎ, $t_1 = 4, t_2 = 3, t'_1 = 3$ এবং $t'_2 = 2$

সুতরাং, $T_u = \frac{1}{12 \times 10}\left(4^3 - 4 + 3^3 - 3\right) = \frac{84}{120} = 0.7$

আর, $T_v = \frac{1}{120}\left(3^3 - 3 + 2^3 - 2\right) = \frac{30}{120} = 0.25$

সুতরাং, $$R = \frac{\frac{n^2-1}{12} - \frac{T_u + T_v}{2} - \frac{1}{2n}\sum d_i^2}{\sqrt{\frac{n^2-1}{12} - T_u}\sqrt{\frac{n^2-1}{12} - T_v}}$$

$$= \frac{8.25 - 0.475 - 2}{\sqrt{8.25 - 0.70}\sqrt{8.25 - 0.25}}$$

$$= \frac{5.775}{\sqrt{7.55 \times 8.00}}$$

$= \frac{5.775}{7.77} = 0.74$ (আসন্ন)

5.7 অনুশীলনী

সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন :

(১) যদি y-এর উপর x-এর নির্ভরন রেখা ও x-এর উপর y-এর নির্ভরন রেখা সমাপতিত হয়, তবে সহগাঙ্কের মান কত?

(২) যদি 3y – 2x = 9 এবং 3x – 2y = 7 দুটি নির্ভরন রেখা হয় তবে x ও y-এর মধ্যকগুলি নির্ণয় করুন।

(৩) যদি 5x + 3y = 6, y-এর নির্ভরন রেখা হয়, তবে সহগতি কোন্ চিহ্নবিশিষ্ট হবে?

(৪) নির্ভয়নাঙ্কদ্বয়ের গুণফল দেওয়া থাকলে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করা যাবে কি?

(৫) নিচের প্রতিটি ক্ষেত্রে ধনাত্মক সহপরিবর্তন ঋণাত্মক সহ পরিবর্তন অথবা কোনও সহপরিবর্তন নেই কিনা বলুন।

(ক) স্বামী ও স্ত্রীদের বয়স।

(খ) বৃদ্ধি ও জুতার মাপ।

(গ) বীমা কোম্পানির লাভ ও তাদের যতগুলি দাবি পূরণ করতে হয়।

(ঘ) শিক্ষাবর্ষ ও আয়।

(ঙ) বৃষ্টিপাতের পরিমাণ ও উৎপাদিত শস্য।

(৬) নিম্নের প্রদত্ত সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক থেকে x ও y চলকগুলির মধ্যে সম্পর্ক বল :
(ক) – 1 (খ) – 0.6 (গ) 0.8 এবং (ঘ) + 1

(৭) x ও y-এর মধ্যে সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক 0.75। $u = \frac{x-10}{5}$ এবং $y = \frac{y-15}{-6}$ হলে, u ও v-এর মধ্যে সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক কত।

(৮) নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে কোন্ সহগতির সাহায্যে সম্পর্ক পরিমাপ করা হয়।
(ক) শিক্ষাগত যোগ্যতা এবং সততা।
(খ) পদমর্যাদা এবং আয়।
(গ) মুনাফা এবং উৎপাদন।

রচনাত্মক প্রশ্ন :

(১) বিক্ষেপণ চিত্র কী ও ইহার ব্যবহারগুলি বর্ণনা করুন। কীভাবে বিক্ষেপণ চিত্রের সাহায্যে সহগতির প্রকার নির্ণয় করা যায়?

(২) সহগাঙ্ক কাকে বলে? সহগাঙ্কের-ব্যবহারগুলি বর্ণনা করুন। এর গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্যগুলি ব্যাখ্যা করুন।

(৩) মানক্রমিক সহগাঙ্ক কাকে বলে? এর ব্যবহারগুলি কী কী?

(৪) নির্ভরন রেখার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যগুলি বর্ণনা করুন ও সহগাঙ্কের সঙ্গে-এর সম্পর্ক আলোচনা করুন।

(৫) (i) $r_{xy} = +1$, (ii) $r_{xy} = -1$ এবং (ii) $r_{xy} = 0$ হলে নির্ভরন রেখাদ্বয়ের সমীকরণ কিরূপ হবে?

(৬) কোনও সামগ্রীর দর ও যোগানের নিম্নলিখিত মানগুলি থেকে পিয়ারসনের সহগাঙ্কের মান নির্ণয় করুন ও আপনার মতামত দিন।

দর (টাকায়)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
যোগান (কেজিতে)	30	29	29	25	24	24	24	21	18	15

(৭) নিম্নলিখিত তথ্য থেকে কার্ল পিয়ারসনের সহগাঙ্কের মান নির্ণয় করুন :

(i) $\sum x = 125, \sum y = 80, n = 10, \sum x^2 = 1585, \sum y^2 = 650, \sum xy = 1007$

(ii) $\sum x = 140,\ \sum y = 150, n = 10,\ \sum y(x-10)^2 = 180,\ \sum (y-15)^2 = 215,\ \sum (x-10)(y-15) = 60$

(৮) 1990-1999 সালে কোনও প্রতিষ্ঠানের বিনিয়োগ ও লাভের পরিমাণ নিচে দেওয়া হল। এখান থেকে উপযুক্ত নির্ভরন সমীকরণটি চিহ্নিত করে সেটি নির্ধারণ করুন।

বছর :	’90	’91	’92	’93	’94	’95	’96	’97	’98	’99
লাভ (হাজার টাকায়) :	40	45	50	65	70	70	80	85	85	95
বিনিয়োগ : (হাজার টাকায়)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

(৯) x ও y চলক দু'টির ক্ষেত্রে নির্ভরন রেখা দু'টির সমীকরণ হল $4x - 5y + 33 = 0$ এবং $20x - 9y = 107$। x-এর উপর y-এর ও y-এর উপর x-এর সমীকরণ দুটিকে চিহ্নিত কর। এবং r_{xy} -এর মান নির্ণয় কর। যখন $x = 10$, তখন y-এর অনুমিত মান কত হবে? ঐ মানকে y_0 বলা হলে তখন x-এর অনুমিত মান কত হবে?

(১০) একটি বিষয়ে প্রশিক্ষণ নেওয়ার আগে ও পরে 10 জন সদস্যকে নিম্নলিখিতভাবে মানক্রম দেওয়া হয়েছে :

সদস্য :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
আগের মানক্রম :	1	6	3	9	5	2	7	10	8	4
পরের মানক্রম :	6	8	3	7	2	1	5	9	4	10

উপরের তথ্য থেকে স্পিয়ারম্যানের মানক্রমিক সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন ও আপনার মতামত দিন।

একক 6 ❑ অন্তঃপ্রক্ষেপণ (Interpolation)

গঠন

6.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়বার পর আপনি জানতে পারবেন

- অন্তঃপ্রক্ষেপণ কাকে বলে?
- অন্তঃপ্রক্ষেপণে ব্যবহৃত অনুমানগুলি কী কী?
- স্থানান্তকরণ ও সসীম প্রভেদ প্রয়োজক কী।
- নিউটনের সম্মুখগামী ও পশ্চাদগামী অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্রগুলি কী কী।
- কেন্দ্রীয় অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র ও তার উদাহরণ।
- লাগরাঞ্জ-এর অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্রটি কী প্রকার?

6.1 প্রস্তাবনা

অন্তঃপ্রক্ষেপণ রাশিবিজ্ঞানে প্রচুর ব্যবহার হয়। এই আলোচনার আগে সমস্যাটি সম্বন্ধে একটি সম্যক ধারণা করা যাক। আমরা অঙ্কশাস্ত্রে অপেক্ষক (function) জানি। যদি একটি চলক y আর একটি চলক x-এর সঙ্গে সম্পর্ক-যুক্ত হয় এবং x-এর কয়েকটি নির্দিষ্ট মানের জন্য y-এর এক বা একাধিক মান থাকে, তবে y-কে x-এর

অপেক্ষক বলা হয়। এখানে x-কে স্বাধীন চলক (Independent Variable) ও y-কে অধীন চলক (Dependent variable) বলা হয় এবং $y = f(x)$ রূপে প্রকাশ করা হয়। যেমন, $y = x^2 + 5x + 6$ একটি অপেক্ষক যেখানে x-এর মান উল্লেখ করলে y-এর মান নির্ণয় করা যাবে।

কিন্তু রাশিভিত্তিক বিশ্লেষণের (Numerical Analysis) ক্ষেত্রে সাধারণত x এবং y-এর মধ্যে প্রকৃত অপেক্ষীয় সম্পর্কটি অজানা থাকে অথবা জানা থাকলেও তা খুব জটিল। শুধু কয়েক জোড়া স্বাধীন ও তার অনুসারী অধীন চলকের মান দেওয়া থাকে। ঐগুলিকে ব্যবহার করে প্রদত্ত স্বাধীন চলকের প্রসারের মধ্যের কোনও নির্দিষ্ট মানের জন্য অধীন চলকের মান অথবা স্বাধীন চলকের প্রসারের বাইরে কাছাকাছি কোনও নির্দিষ্ট মানের জন্য অধীন চলকের মান নির্ণয় করা হয়। সংখ্যাভিত্তিক বিশ্লেষণে এই স্বাধীন চলককে **নিধান** (Argument) এবং অধীন চলককে **নির্ভরক** (Entry) বলা হয়।

প্রদত্ত নিধানগুলির প্রাসারের (range-এর) মধ্যবর্তী কোনও নির্দিষ্ট নিধানের মানের জন্য নির্ভরক নির্ণয় করার পদ্ধতিকে অন্তঃপ্রক্ষেপণ (Interpolation) বলে।

প্রদত্ত নিধানগুলির প্রসারের বাইরে অথচ কাছাকাছি (Slightly outside) কোনও নির্দিষ্ট নিধানের জন্য নির্ভরক নির্ণয় করার পদ্ধতিকে **বহিঃপ্রক্ষেপণ** (Extrapolation) বলে।

উদাহরণ হিসাবে প্রদত্ত নিধান ও নির্ভরকের মানগুলি নেওয়া যাক।

x :	2	3	5	7	8
y :	14	19	28	30	38

এখন $x = 4$-এর জন্য y-এর মান নির্ণয়কে অন্তঃপ্রেক্ষপণ ও $x = 1$ বা $x = 9$ -এর জন্য y-এর মান নির্ণয় পদ্ধতিতে বহিঃপ্রক্ষেপণ বলা হয়। এই অধ্যায়ে কেবলমাত্র অন্তঃপ্রেক্ষপণ বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

6.2 অন্তঃপ্রক্ষেপণে ব্যবহৃত অনুমানসমূহ (Assumptions for interpolation)

(i) চলকগুলির গতিবিধি হঠাৎ পরিবর্তিত হবে না, অর্থাৎ চলকগুলির চলাচলে হঠাৎ কোনও উত্থান বা পতন (sudden jump) থাকবে না।

(ii) চলকের মানগুলির পরিবর্তনের ঝোঁকের মধ্যে একটি নির্দিষ্টতা (consistency) থাকবে, অর্থাৎ মানগুলির বিচ্যুতির ক্ষেত্রে ধারাবাহিকতা (regularity) থাকবে এবং উত্থান-পতন সমরূপ (uniform) হবে।

(iii) চলকগুলিকে সম্পর্কযুক্ত হতে হবে।

6.2.1 স্থানান্তরণ প্রয়োজক (Shifting Operator)

ধরা যাক $y = f(x)$ আপেক্ষকে, যদি পরপর দুটি নিধানের মধ্যে পার্থক্য সমান, h হয়, তবে স্থানান্তর প্রয়োজককে $Ef(x)$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয় এবং ইহা ঠিক পরবর্তী উচ্চ নিধানের জন্য নির্ভরকের সমান হয়। তাহলে,

$Ef(x) = f(x + h)$, যেখানে h সমপার্থক্যের মান।

অথবা, $Ey_0 = y_1$, $Ey_1 = y_2$,.........

ইহাকে প্রথম ঘাত (first order) স্থানান্তরণ বলে। একইভাবে,

দ্বিতীয় ঘাত (second order) স্থানান্তরণ হল,

$E^2 f(x) = E [E f(x)] = Ef (x + h) = f(x + 2h)$

তৃতীয় ঘাত (Third order) স্থানান্তরণ হল,

$E^3f(x) = E[E^2f(x)] = Ef(x +2h) = f(x + 3h)$

এবং শেষপর্যন্ত, n-ঘাত (nth order) স্থানান্তরণ হল,

$E^nf(x) = f(x + nh)$

উদাহরণ ১. $y = x^3$ অপেক্ষকের প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয়-ঘাত স্থানান্তরণ মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরা যাক পরপর নিধানের মধ্যবর্তী পার্থক্য h.

তবে, $Ef(x) = f(x+h) = (x + h)^3$

$E^2f(x) = f(x + 2h) = (x + 2h)^3$

এবং $E^3f(x) = f(x + 3h) = (x + 3h)^3$

6.2.2 সসীম প্রভেদ প্রয়োজক (Finite Difference Operator)

এই প্রয়োজককে Δ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। এটা কোনও অপেক্ষককে নিম্নলিখিত রূপে পরিবর্তিত করে। নিধানের পরপর মানের পার্থক্য সমান হতে হবে এবং তা h ধরা যাক।

প্রথম ঘাত সসীম প্রভেদ মান,

$\Delta f(x) = f(x +h) - f(x)$

অথবা, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$,......

দ্বিতীয় ঘাত সসীম প্রভেদ মান,

$$\begin{aligned}\Delta^2f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta\{f(x+h) - f(x)\}\\ &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)\\ &= f\ \{x + 2h) - f(x + h) - f(x + h) + f(x)\\ &= f(x + 2h) - 2f\ (x + h) + f(x)\end{aligned}$$

অথবা, $\Delta^2y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$

$\Delta^2y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$, ইত্যাদি

একইভাবে তৃতীয় ঘাত $\Delta^3 f(x)$, চতুর্থ ঘাত $\Delta^4 f(x)$ ইত্যাদি সংজ্ঞা দেওয়া যাবে।

নিম্নে প্রভেদ ছক (Difference Table) দেখান হল :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	...	$\Delta^n y$
x_0	y_0				
		$y_1 - y_0 = \Delta y_0$			
x_1	y_1		$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0$		
		$y_2 - y_1 = \Delta y_1$			
x_2	y_2		$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1$		
		$y_3 - y_2 = \Delta y_2$			
x_3	y_3				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\Delta^n y_0$
x_{n-2}	y_{n-2}				
		$y_{n-1} - y_{n-2} = \Delta y_{n-2}$			
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = \Delta^2 y_{n-2}$		
		$y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}$			
x_n	y_n				

যদি $(n + 1)$ জোড়া নিধান ও নির্ভরকের মান দেওয়া থাকে, তবে $\Delta^n y$ নির্দিষ্ট (Constant) ও $(n + 1)$ ঘাত বা তার বেশি ঘাত সসীম প্রভেদ শূন্য (0) হবে।

উদাহরণ ২. নিম্নলিখিত তথ্যের প্রভেদ ছক তৈরি করুন :

x	4	6	8	19	12
y	7	10	14	19	26

সমাধান :

প্রভেদ ছক

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
4	7				
		3			
6	10		1		
		4		0	
8	14		1		1
		5		1	
10	19		2		
		7			
12	26				

6.2.3 E এবং Δ-এর মধ্যে সম্পর্ক (Relation of E and Δ)

আমরা জানি, $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$, যেখানে h **সমপার্থক্যের মান**

$= Ef(x) - f(x)$

$= (E - 1)\ f(x)$

$\therefore \Delta \equiv E - 1$

অথবা, $E \equiv 1 + \Delta$

উদাহরণ ৩. Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ নির্ণয় করুন, যেখানে $y = x^3$.

সমাধান : ধরা যাক, সমপার্থক্যের মান h.

এখন, $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + h) - f(x) = (x + h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3$

$= 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

$\Delta^2(y) = \Delta^2 f(x) = \Delta f(x + h) - \Delta f(x)$

$= 3(x + h)^2 \cdot h + 3\ (x + h)\ h^2 + h^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3$

$= 3x^2h + 6xh^2 + 3h^3 + 3xh^2 + 3h^3 + h^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3$

$= 6xh^2 + 6h^3$

$\Delta^3 y = \Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x + h) - \Delta^2 f(x)$

$= 6(x + h)h^2 + 6h^3 - 6xh^2 - 6h^3$

$= 6h^3$

$\Delta^4 y = \Delta^4 f(x) = \Delta^3 f(x + h) - \Delta^3 f(x)$

$= 6h^3 - 6h^3$

$= 0$

উদাহরণ ৪. নিম্নে প্রদত্ত তথ্য থেকে x = 2-এর জন্য y-এর মান নির্ণয় করুন :

x	0	1	3	4
y	5	6	50	105

সমাধান : যেহেতু কেবলমাত্র y-এর চারটি মান দেওয়া রয়েছে, তাই y-কে তিন-ঘাত বিশিষ্ট ঘাতজক (polynomial in x of degree 3) অনুমান করলে চতুর্থ ঘাত প্রভেদ $\Delta^4 y$ শূন্য (0) হবে। ধরা যাক x = 0, 1, 2, 3, 4-এর জন্য y-এর মানগুলি যথাক্রমে y_0, y_1, y_2, y_3, y_4

এখন $\Delta^4 y_0 = 0$

বা, $(E - 1)^4 y_0 = 0$

বা, $(E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1)y_0 = 0$

বা, $E^4 y_0 - 4E^3 y_0 + 6E^2 y_0 - 4Ey_0 + y_0 = 0$

বা, $y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$

বা, $105 - 4 \times 50 + 6y_2 - 4 \times 6 + 5 = 0$

বা, $y_2 = 19$

$\therefore$ নির্ণেয় y-এর মান 19.

6.3 নিউটনের সন্মুখগামী অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র (Netwon's Forward Interpolation Formula)

মনে করা যাক, $y = f(x)$ অপেক্ষকের $(n + 1)$ টি নিধান $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$-এর অনুরূপ নির্ভরক $y_0, y_1, \ldots\ldots y_n$ দেওয়া আছে যেখানে নিধানগুলি পরপর সমদূরত্ব বিশিষ্ট, অর্থাৎ $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots. = x_n - x_{n-1} = h$। নিধানের প্রসারের অন্তর্গত কোনও নির্দিষ্ট মানের জন্য যা ছকের উপরিভাগে বা নিধান সারির প্রথমভাগে রয়েছে এরূপ ক্ষেত্রে y-এর প্রাককলক (estimate) নিউটনের সন্মুখগামী অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র দিয়ে নির্ণয় করা হয় যা নিম্নরূপ :

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$\ldots. + \frac{u(u-1)(u-2)..(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

যেখানে, $u = \dfrac{x - x_0}{h}$

এই সূত্র কেবলমাত্র সমদূরত্ব বিশিষ্ট নিধানের জন্য প্রযোজ্য এবং ছকের শুরুর দিকের নিধানের জন্য খুবই উপযুক্ত। ইহা শুরুর দিকের নিধানের বহিঃপ্রক্ষেপণের জন্য ব্যবহার করা যেতে পারে।

উদাহরণ ৫. এক ব্যক্তির বিভিন্ন বয়সে জীবন বীমায় প্রদেয় টাকার পরিমাণ নিম্নলিখিত ছকে দেওয়া আছে। উহা থেকে 22 বছর বয়সে প্রদেয় টাকার পরিমাণ নির্ণয় করুন।

বয়স (বছর)	20	25	30	35	40
প্রদত্ত টাকা	25	28	32	37	43·50

সমাধান :

প্রভেদ ছক

বয়স (বছর) (x)	প্রদত্ত টাকা (y)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
20	25				
		3			
25	28		1		
		4		0	
30	32		1		0·50
		5		0·50	
35	37		1·50		
		6·50			
40	43·50				

নিউটনের সম্মুখগামী অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র,

$$y = f(x) \equiv y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

যেখানে $u = \frac{22-20}{5} = 0{\cdot}4,\ y_0 = 25,\ \Delta y_0 = 3,\ \Delta^2 y_0 = 1,\ \Delta^3 y_0 = 0$ এবং $\Delta^4 y_0 = 0{\cdot}50$

$$\therefore f(22) = 25 + 0{\cdot}4 \times 3 + \frac{0{\cdot}4(0{\cdot}4-1)}{2{\cdot}1} \times 1 + \frac{0{\cdot}4(0{\cdot}4-1)(0{\cdot}4-2)}{3{\cdot}2{\cdot}1} \times 0$$

$$+ \frac{0{\cdot}4(0{\cdot}4-1)(0{\cdot}4-2)(0{\cdot}4-3)}{4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1} \times 0{\cdot}5 = 26{\cdot}0592$$

$\therefore$ 22 বছর বয়সে ঐ ব্যক্তির প্রদেয় টাকার পরিমাণ ছিল 26·06 টাকা।

উদাহরণ ৬. নিম্নলিখিত তথ্য থেকে f(3·5) নির্ণয় করুন :

x	3	4	5	6
y	4	13	26	43

সমাধান : যেহেতু নিধান x-এর মানগুলি সমদূরত্ব বিশিষ্ট এবং 3·5 নিধানের শুরু দিকের মান, তাই নিউটনের সম্মুখগামী অন্তঃক্ষেপণ সূত্র দ্বারা f(3·5)-এর মান নির্ণয় করা যাবে।

প্রভেদ ছক

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
3	4			
		9		
4	13		4	
		13		0
5	26		4	
		17		
6	43			

এখানে, $u = \frac{3.5-3}{1} = 0{\cdot}5,\ f(3) = 4,\ \Delta f(3) = 9,\ \Delta^2 f(3) = 4$ এবং $\Delta^3 f(3) = 0$

$$\therefore\ f(3{\cdot}5) = 4 + 0{\cdot}5 \times 9 + \frac{0{\cdot}5(0{\cdot}5-1)}{2{\cdot}1} \times 4 + \frac{0{\cdot}5(0{\cdot}5-1)(0{\cdot}5-2)}{3{\cdot}2{\cdot}1} \times 0 = 8$$

6.4 নিউটনের পশ্চাদগামী অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র (Newton's Backward Interpolation Formula)

মনে কর, $y_0, y_1, \ldots\ldots y_n$, $y = f(x)$ অপেক্ষকের মানগুলির সমদূরত্ব বিশিষ্ট অনুরূপ মান যথাক্রমে $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$ দেওয়া আছে। নিধানের প্রসারের শেষের দিকের কোনও নির্দিষ্ট মানের জন্য নির্ভরকের মান নির্ণয় করতে হলে নিম্নলিখিত নিউটনের পশ্চাদগামী অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগ করা যায়।

$$y = y_n + w\Delta y_{n-1} + \frac{w(w+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{w(w+1)(w+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{w(w+1)\ldots..(w+n-1)}{n!}\Delta^n y_o$$

যেখানে, $w = \frac{x - x_n}{h}$

দ্রষ্টব্য : এই সূত্র কেবলমাত্র সমদূরত্ব বিশিষ্ট নিধানের জন্য প্রযোজ্য এবং ছকের নিচের দিকে নিধানের জন্য উপযুক্ত। ইহা শেষের দিকের নিধানের বহিঃপ্রক্ষেপণের জন্য ব্যবহার করা যেতে পারে।

উদাহরণ ৭. x-এর মান যখন 2, 4, 6 এবং 8 তখন y-এর মান যথাক্রমে 7, 21, 43 এবং 73, উপযুক্ত অন্তঃপ্রক্ষেপণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে x-এর মান যখন 7 তখন y-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : x = 7 প্রদত্ত x-এর মানগুলির মধ্যে শেষের দিকে এবং মানগুলি সমদূরত্ব বিশিষ্ট, তাই নিউটনের পশ্চাদগামী অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র ব্যবহার করে y-এর মান নির্ণয় করা উপযুক্ত।

প্রভেদ ছক

x	3	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2	7			
		14		
4	21		8	
		22		0
6	43		8	
		30		
8	73			

এখানে $w = \frac{7-8}{2} = -\frac{1}{2} = -0{\cdot}5,\ y_3 = 73,\ \Delta y_2 = 30,\ \Delta^2 y_1 = 8,\ \Delta^3 y_0 = 0$

নিউটনের পশ্চাদগামী অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র থেকে পাই,

$$y = y_3 + w\,\Delta y_2 + \frac{w(w+1)}{2!}\,\Delta^2 y_1 + \frac{w(w+1)(w+2)}{3!}\,\Delta^3 y_0$$

$$= 73 + (-0{\cdot}5) \times 30 + \frac{(-0{\cdot}5)(-0{\cdot}5+1)}{2{\cdot}1} \times 8 + \frac{(-0{\cdot}5)(-0{\cdot}5+1)(-0{\cdot}5+2)}{3{\cdot}2{\cdot}1} \times 0$$

$= 57$

$\therefore$ নির্ণেয় y-এর মান 57.

উদাহরণ ৮. নিম্নলিখিত শ্রমিকদের আয়ের বিভাজন ছক থেকে প্রতিদিন 36 টাকার বেশি অথচ 40 টাকার কম আয়ের কর্মীর সংখ্যা নির্ণয় করুন :

প্রতিদিনের আয় (টাকায়) (নিচ থেকে)	20	25	30	35	40
কর্মী সংখ্যা	20	45	115	210	225

সমাধান : 36 টাকার কম আয়ের কর্মী সংখ্যা নির্ণয় করা যাক।

প্রভেদ ছক

আয় (টাকায়) x	কর্মী সংখ্যা (ক্রমযৌগিক) y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$20(x_0)$ টাকার নিচে	$20(y_0)$				
		25			
$25(x_1)$ টাকার নিচে	$45(y_1)$		45		
		70		–20	
$30(x_2)$ টাকার নিচে	$115(y_2)$		25		–85
		95		–105	
$35\ (x_3)$ টাকার নিচে	$210(y_3)$		–80		
		15			
$40(x_4)$ টাকার নিচে	$225(y_4)$				

x = 36 মানটি ছকের নিচের দিকে আছে, তাই নিউটনের পশ্চাদগামী অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগ করা বাঞ্ছনীয়।

এখানে $w = \frac{x - x_4}{h} = \frac{36-40}{5} = -\frac{4}{5} = -0{\cdot}8$

$y_4 = 225,\ \Delta y_3 = 15,\ \Delta^2 y_2 = -80,\ \Delta^3 y_1 = -105;\ \Delta^4 y_0 = -85$

এখন, $$y = y_4 + w\Delta y_3 + \frac{w(w+1)}{2{\cdot}1}\Delta^2 y_2 + \frac{w(w+1)(w+2)}{3{\cdot}2{\cdot}1}\Delta^3 y_1 + \frac{w(w+1)(w+2)(w+3)}{4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1}\Delta^4 y_0$$

$$= 225 + (-0{\cdot}8) \times 15 + \frac{(-0{\cdot}8)(-0{\cdot}8+1)}{2{\cdot}1} \times (-80) + \frac{(0{\cdot}8)(0{\cdot}8+1)(-0{\cdot}8+2)}{3{\cdot}2{\cdot}1} \times (-105) + \frac{(-0{\cdot}8)(-0{\cdot}8+1)(-0{\cdot}8+2)(-0{\cdot}8+3)}{4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1} \times (-85) = 224{\cdot}256$$

$\therefore$ 36 টাকা অথবা বেশি, অথচ 40 টাকার কম আয়ের কর্মীর সংখ্যা $= (225 - 224{\cdot}256)$

$= 0{\cdot}774$

$= 1$ জন।

6.5 কেন্দ্রীয় অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র (Central Interpolation Formula)

ছকের মধ্যবর্তী কোনও নিধানের জন্য নির্ভরকের মান নির্ণয় করতে হলে কেন্দ্রীয় অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগ করা হয়। তবে মনে রাখতে হবে, এক্ষেত্রেও নিধানের পরপর মানগুলি সমদূরত্ব বিশিষ্ট হতে হবে। এইক্ষেত্রে সাধারণত দুটি সূত্র ব্যবহার করা হয়—স্টারলিং এবং ব্যাসেলের সূত্র। মধ্যবর্তী নিধানের মানের ক্ষেত্রে এই দুটি সূত্র নিউটনের সম্মুখগামী বা পশ্চাদগামী অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র থেকে অধিক অনুসারী (Converge more rapidly) হয়।

(i) স্টারলিং-এর সূত্র (Stirling's Formula) :

যদি নিধানের মান.....x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3,......এর অনুরূপ নির্ভরকের মানগুলি.....y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3,.......হয়, তবে স্টারলিং-এর অন্তঃক্ষেপণ সূত্র হল :

$$y = y_0 + u.\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u(u^2-1^2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2}$$

$$+ \frac{u^2(u^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{u(u^2-1^2)(u^2-2^2)}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-3}}{2} + \ldots\ldots$$

যেখানে, $u = \dfrac{x - x_0}{h}$

যখন u-এর মান –0·25 থেকে + 0·25-এর মধ্যে থাকে, তখন স্টারলিং-এর অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র যুক্তিযুক্ত।

(ii) বেসেল-এর অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র (Bessel's Interpolation Formula) :

সূত্রটি হল :

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} + v\cdot\Delta y_0 + \frac{\left\{v^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{2!}\frac{\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \frac{v\left\{v^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \frac{\left\{v^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{v^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-1} + \Delta^4 y_{-2}}{2} + \frac{v\left\{v^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{v^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \ldots.$$

যেখানে, $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ এবং $v = u - \dfrac{1}{2}$

যখন u-এর মান + 0·25 থেকে + 0·75 অথবা v-এর মান –0·25 থেকে + 0·25-এর মধ্যে থাকে, তখন বেসেল-এর অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র যুক্তিযুক্ত।

উদাহরণ ৯. 4টি সংখ্যার লগারিদমের অংশক নিচে দেওয়া হল। ছক থেকে 4213-এর লগারিদম-এর অংশক নির্ণয় কর।

সংখ্যা	4200	4210	4220	4230
অংশক	6232493	6242821	6253125	6263404

সমাধান : যেহেতু নিধানের মানগুলি সমদূরত্ব বিশিষ্ট এবং 4213 ছকের মধ্যবর্তী অংশে আছে, তাই কেন্দ্রীয় অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগ উপযুক্ত।

মনে কর, $x_0 = 4210$

তাহলে, $u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{4213 - 4210}{10} = 0{\cdot}3$

এক্ষেত্রে বেসেল-এর অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র প্রযোজ্য।

প্রভেদ ছক

সংখ্যা (x)	অংশক (y)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$4200(x_{-1})$	$6232491(y_{-1})$			
		$10328(\Delta y_{-1})$		
$4210(x_0)$	$6242821(y_0)$		$-24(\Delta^2 y_{-1})$	
		$10304(\Delta y_0)$		$-1(\Delta^3 y_{-1})$
$4220(x_1)$	$6253125(y_1)$		$-25(\Delta^2 y_0)$	
		$10279(\Delta y_1)$		
$4230(x_2)$	$6263404(y_2)$			

এখানে $v = 0{\cdot}3 - 0{\cdot}5 = -0{\cdot}2$

এক্ষণে বেসেলের অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র থেকে পাই,

$$y = \frac{6242821 + 6253125}{2} + (-0{\cdot}2) \times 10304 + \frac{(0{\cdot}04 - 0{\cdot}25)}{2} \times \frac{(-24 - 25)}{2} + \frac{(-0{\cdot}2)(0{\cdot}04 - 0{\cdot}25)}{6} \times -1$$

$= 6245914{\cdot}8$

$= 6245915$

$\therefore$ নির্ণেয় অংশকের মান 6245915.

উদাহরণ ১০. নিম্নলিখিত ছক থেকে $x = 6{\cdot}8$-এর জন্য y-এর মান উপযুক্ত অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করুন।

x	3	5	7	9	11
y	20	23	27	29	32

সমাধান : যেহেতু x-এর মানগুলি সমদূরত্ব বিশিষ্ট এবং $x = 6{\cdot}8$ ছকের মধ্যবর্তী অংশে আছে, তাই কেন্দ্রীয় অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগ উপযুক্ত।

মনে কর, $x_0 = 7$

তাহলে, $u = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{6{\cdot}8 - 7}{2} = -\dfrac{0{\cdot}2}{2} = -0{\cdot}1$

এক্ষেত্রে স্টারলিং-এর সূত্র প্রযোজ্য।

প্রভেদ ছক

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$3(x_{-2})$	$20(y_{-2})$				
		$3(\Delta y_{-2})$			
$5(x_{-1})$	$23(y_{-1})$		$1(\Delta^2 y_{-2})$		
		$4(\Delta y_{-1})$		$-3(\Delta^3 y_{-2})$	
$7(x_0)$	$27(y_0)$		$-2(\Delta^2 y_{-1})$		$6(\Delta^4 y_{-2})$
		$2(\Delta y_0)$		$3(\Delta^3 y_{-1})$	
$9(x_1)$	$29(y_1)$		$1(\Delta^2 y_0)$		
		$3(\Delta y_1)$			
$11(x_2)$	$32(y_2)$				

এক্ষণে, স্টারলিং-এর অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$y = 27 + (-0{\cdot}1) \times \frac{2+4}{2} + \frac{(0{\cdot}1)^2}{2\times1} \times (-2) + \frac{(-0{\cdot}1)\left\{(-0{\cdot}1)^2 - 1\right\}}{3\times2\times1} \times \frac{3+(-3)}{2}$$

$$+ \frac{(-0.1)^2\left\{(-0.1)^2 - 1\right\}}{4.3.2.1} \times 6 = 26{\cdot}687525$$

6.6 লাগরাঞ্জ-এর অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র (Lagrange's Interpolation Formula)

নিধানের পরপর দূরত্ব সমান বা অসমান যাই হোক না কেন, এই সূত্র প্রয়োগ করে নির্ভরকের মান নির্ণয় করা যাবে। লাগারাঞ্জের অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্রটি নিম্নরূপ :

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2).......(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2).........(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)......(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2).......(x_1-x_n)}y_1 + ...$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)......(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} y_i + ... +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1).......(x_n-x_{n-1})} y_n$$

যেখানে, y হল অন্তঃপ্রক্ষেপিত মান,

x হল যে মানের জন্য y-এর মান নির্ণয় করতে হবে,

x_0, x_1, x_2,......x_n হল নিধান x-এর প্রদত্ত মানসমূহ,

y_0, y_1, y_2,.....y_n হল নির্ভরক y-এর প্রদত্ত মানসমূহ।

উদাহরণ ১১. নিম্নলিখিত ছকে বিভিন্ন বয়সে একজন শিশুর স্বাভাবিক ওজন দেওয়া আছে। উহা থেকে শিশুটির 4 মাস বয়সে কত ওজন ছিল নির্ণয় করুন।

বয়স (মাসে)	0	2	3	5	6
ওজন (পাউন্ডে)	5	7	8	10	12

সমাধান : মনে কর, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$

এবং $y_0 = 5$, $y_1 = 7$, $y_2 = 8$, $y_3 = 10$, $y_4 = 12$

যেহেতু পরপর নিধানের মানগুলির দূরত্ব অসমান, তাই লাগরাঞ্জের অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$y = \frac{(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)}{(0-2)(0-3)(0-5)(0-6)} \times 5 + \frac{(4-0)(4-3)(4-5)(4-6)}{(2-0)(2-3)(2-5)(2-6)} \times 7 +$$

$$\frac{(4-0)(4-2)(4-5)(4-6)}{(3-0)(3-2)(3-5)(3-6)} \times 8 + \frac{(4-0)(4-2)(4-3)(4-6)}{(5-0)(5-2)(5-3)(5-6)} \times 10 +$$

$$\frac{(4-0)(4-2)(4-3)(4-5)}{(6-0)(6-2)(6-3)(6-5)} \times 12 = \frac{80}{9} = 8\frac{8}{9} = 8{\cdot}9 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore$ শিশুটির 4 মাস বয়সে ওজন 8·9 পাউন্ড ছিল।

বিবর্ত অন্তঃপ্রক্ষেপণ (Inverse Interpolation) :

এতক্ষণ পর্যন্ত অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্রের সাহায্যে (n + 1) জোড়া নিধান নির্ভরকের মান (x_0, y_0), (x_1, y_1),.......(x_n, y_n) দেওয়া থাকলে নির্দিষ্ট কোনও নিধান x-এর জন্য নির্ভরক y কীভাবে নির্ণয় করা হয় তা

আলোচনা করা হয়েছে। এখন y_0, y_1,.......y_n-এর মধ্যবর্তী কোন নির্ভরক y দেওয়া থাকলে নিধান x কীভাবে নির্ণয় করা হয় তার সূত্র নিয়ে আলোচনা করা হবে। যেহেতু লাগরাঞ্জ-এর সূত্র অসমান শ্রেণীর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, তাই লেখা যায়,

$$x = \frac{(y-y_1)(y-y_2)......(y-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_n)}x_0 + \frac{(y-y_0)(y-y_2).....(y-y_n)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2).....(y_1-y_n)}x_1 + ...$$
$$+ \frac{(y-y_0)(y-y_1).....(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})....(y-y_n)}{(y_i-y_0)(y_i-y_1).....(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})...(y_i-y_n)}x_i + ...$$
$$+ \frac{(y-y_0)(y-y_1).....(y-y_{n-1})}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)......(y_n-y_{n-1})}x_n$$

উদাহরণ ১২. নিম্নলিখিত ছক থেকে y = 12 হলে, x-এর মান নির্ণয় কর :

x :	2	4	7
y :	7	10	16

সমাধান : মনে কর, $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_2 = 7$

এবং $y_0 = 7$, $y_1 = 10$, $y_2 = 16$

এখানে, y = 12

লাগরাঞ্জের বিবর্ত অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$x = \frac{(12-10)(12-16)}{(7-10)(7-16)} \times 2 + \frac{(12-7)(12-16)}{(10-7)(10-16)} \times 4 + \frac{(12-7)(12-10)}{(16-7)(16-10)} \times 7 = 5{\cdot}1481$$

$\therefore$ নির্ণেয় x এর মান 5·1481

6.7 অনুশীলনী

সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন :

(১) প্রদত্ত ছক থেকে নিম্নলিখিত মানগুলি কোন্ পদ্ধতিতে নির্ণয় করা হবে লিখুন :

x :	0	1	2	3	4
y :	3	4	6	10	18

x = 0·5, 3·5, 2·2 এবং 2·8-এর জন্য y-এর মান নির্ণয় করার ক্ষেত্রে

(২) একটি ছক দেওয়া আছে :

x :	0	2	3	5
y :	0	3	7	31

কোন পদ্ধতি প্রযোজ্য

(ক) x = 1-এর জন্য y-এর মান নির্ণয়ের জন্য।

(খ) y = 5-এর জন্য x-এর মান নির্ণয়ের জন্য।

(৩) $\left(\frac{\Delta}{E}\right)^2 U_x$ এবং $\left(\frac{\Delta^2 U_x}{E^2 U_x}\right)$-এর মধ্যে পার্থক্য নিরূপণ করুন।

(৪) $\Delta^3 x^4$-এর মান নির্ণয় করুন।

(৫) $y_0 = 5{\cdot}6$, $y_1 = 8{\cdot}3$ এবং $y_2 = 15{\cdot}6$ হলে, Ey_1 এবং Δy_1-এর মান কত?

রচনাত্মক প্রশ্ন :

(১) অন্তঃপ্রক্ষেপণ বলতে কী বোঝ? বহিঃপ্রক্ষেপণের সঙ্গে এর পার্থক্য কী?

(২) অন্তঃপ্রক্ষেপণের বিভিন্ন পদ্ধতিগুলি কী কী? কোন্ কোন্ অবস্থায় এই পদ্ধতিগুলি প্রয়োগ করা হয়?

(৩) Δএবং E প্রয়োজকের সংজ্ঞা দিন। প্রমাণ করুন যে, $E = 1 + \Delta$

(৪) বিবর্ত অন্তঃপ্রক্ষেপণ বলতে কী বোঝ? লাগরাঞ্জ-এর বিবর্ত অন্তঃপ্রক্ষেপণ সূত্র বর্ণনা করুন।

(৫) নিম্নলিখিতগুলি লিখুন (Write down the following) :

(i) $\Delta \log x$-এর মান নির্ণয় করুন, অন্তর-এর দৈর্ঘ্য 'h' ধরুন।

(ii) $\Delta^5 y_1$-কে y-এর বিভিন্ন মানের আকারে প্রকাশ করুন।

(iii) পার্থক্যের অন্তর 1 ধরে $\Delta^2 e^x$ নির্ণয় করুন।

(iv) নিধানের পার্থক্যের অন্তর 1 হলে $\Delta^4 e^x$ নির্ণয় করুন।

(v) যদি $f(x) = (a - x)(b + cx)(d - cx)(f + gx)(h - kx)$ হয়, তবে $\Delta^5 f(x)$ নির্ণয় করুন।

(৬) **প্রদত্ত ছক থেকে $U_{0\cdot5}$, $U_{2\cdot1}$ এবং $U_{3.8}$ নির্ণয় করুন :**

x	0	1	2	3	4
U_x	1	0	5	22	57

(৭) **নিম্নলিখিত ছক থেকে অজানা পদটি নির্ণয় করুন :**

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	–	81

(৮) **নিম্নপ্রদত্ত ছক থেকে x = 18-এর জন্য y-এর মান নির্ণয় করুন :**

x	10	12	15	19
y	22	35	35	90

(৯) **নিমআনলিখিত ছক থেকে f(x) = 100 হলে x-এর মান নির্ণয় করুন :**

x	3	7	9	10
f(x)	168	120	72	63

একক 7 ❑ সূচক সংখ্যা (Index Numbers)

গঠন

7.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করবার পর আপনি জানতে পারবেন—

- সূচক সংখ্যা কাকে বলে?
- সূচক সংখ্যায় ব্যবহৃত প্রতীকগুলি কী কী?
- সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের সমস্যাগুলি কী কী?
- জীবিকা নির্বাহন ব্যয় কাকে বলে?
- জীবিকা নির্বাহন ব্যয়ের সূচকের ব্যবহার এবং
- সূচক সংখ্যার সীমাবদ্ধতাগুলি কী কী?

7.1 প্রস্তাবনা

পরিসংখ্যান গড় (Statistical average)-এর সাহায্যে একজাতীয় কতকগুলি সংখ্যার বা কোনও একটি প্রদত্ত বিভাজনের প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করা হয়। বাস্তবে এমন অনেক সমস্যার সন্মুখীন হতে হয় যখন একটি চলকের (variable-এর) অথবা সম্পর্কযুক্ত চলক (Related variables) গুলির ভিন্ন অবস্থায় মানের গড় পরিবর্তন নির্ণয় করার দরকার হয়। উদাহরণস্বরূপ, 1990 সালের তুলনায় 1999 সালে বিভিন্ন পণ্যদ্রব্যের দর গড়ে কী হারে বৃদ্ধি

বা হ্রাস পেয়েছে, ব্যবসা-বাণিজ্য ও অর্থনীতিতে তা খুবই গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন। 1990 সালের তুলনায় 1999 সালে বিভিন্ন পণ্যদ্রব্যের গড় দর বৃদ্ধি বা হ্রাস যে একক সংখ্যার দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তাকে সূচক সংখ্যা (Index Number) বলে। অনুরূপভাপে, দুটো বিভিন্ন সময়ে শিল্পজাত দ্রব্যাদির উৎপাদনের পরিবর্তনের পরিমাপ, দুটো বিভিন্ন সময়ে দেশের বেকার লোকের সংখ্যার পরিবর্তনের পরিমাপ কিংবা একই শ্রেণীর লোক এক দেশ থেকে আর এক দেশে বদলী হওয়ার ফলে তাদের জীবনধারনের ব্যায়ের যে পরিবর্তন হয়, তার পরিমাপ সূচক সংখ্যার সাহায্যে করা যায়। লক্ষ্য করার বিষয় হল, সূচক সংখ্যার সাহায্যে যে গড় প্রকাশ করা হয় তা অবস্থার ওপর নির্ভরশীল (এখানে অবস্থা বলতে সময় অথবা স্থান অথবা অন্য কিছু বোঝানো হয়)।

সে সংখ্যা দিয়ে বিভিন্ন অবস্থায় (অর্থাৎ সময় কিংবা স্থানের সাপেক্ষে) পণ্যদ্রব্যের দর (Price), পরিমাণ (Quantity), কিংবা মান (Value)-এর আপেক্ষিক পরিবর্তন প্রকাশ করা হয়, তাকে সূচক সংখ্যা (Index Number) বলে। সময়ের সাপেক্ষে পণ্যদ্রব্যের আপেক্ষিক দর প্রকাশক সংখ্যাকে 'দরের সূচক সংখ্যা' (Price Index Number) বলা হয়। একইভাবে, সময়ের সাপেক্ষে পণ্যদ্রব্যের আপেক্ষিক পরিমাণ প্রকাশক সংখ্যাকে 'পরিমাণের সূচক সংখ্যা' (Quantity Index Number) এবং মান প্রকাশক সংখ্যাগুলিকে 'মানের সূচক সংখ্যা' (Value Index Number) বলা হয়।

পূর্বে সূচক সংখ্যার ব্যবহার করা হত প্রধানত পণ্যের দরের পরিবর্তন পরিমাপের জন্য। কিন্তু এখন এর ব্যবহার খুবই ব্যাপকভাবে করা হয়। বিভিন্ন দ্রব্যের পরিবর্তনের সাথে সাথে কর্মচারী বা শ্রমিকদের বেতন, মহার্ঘ ভাতা, বাড়িভাড়ার ভাতা ইত্যাদি পরিবর্তনের প্রয়োজন অনুভূত হয়। এজন্য বর্তমান বিভিন্ন ধরনের দরের সূচকের গতিপ্রকৃতির প্রতি লক্ষ্য রাখা শ্রমিক, মালিক, সমাজ কর্মী, ট্রেড ইউনিয়ন কর্মী কিংবা রাজ্য বা কেন্দ্রীয় সরকারের পক্ষে প্রয়োজন। এই উদ্দেশ্যে বহুল প্রচলিত সূচক হল ভোক্তাদের দরের সূচক (Consumer Price Index or CPI), যার অপর নাম জীবিকা নির্বাহন ব্যায়ের সূচক (Cost of Living Index or CLI)। এছাড়া রাজ্যের বা দেশের মূল্যমান নির্দেশক পাইকারি দরের সূচক (Wholesale Price Index) বহুল ব্যবহৃত হয়।

7.2 সূচক সংখ্যায় ব্যবহৃত প্রতীকসমূহ

আপেক্ষিক পরিবর্তন নির্ণয়ের ক্ষেত্রে যে সময়ের সাপেক্ষে দরের (পরিমাণ বা মানের) পরিবর্তন নির্ণয় করা হয় তাকে ভিত্তিকাল (Base Period) এবং যে সময়ের দর (পরিমাণ বা মান) ঐ ভিত্তিকালের সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয় তাকে চলতি কাল বা বর্তমান কাল (Current Period) বলা হয়। সবসময় ভিত্তিকালে দরের (পরিমাণ বা মানের) সূচক সংখ্যা 100 ধরা হয় এবং চলতিকালের সূচক সংখ্যা দিয়ে পণ্যদ্রব্যের দরের (পরিমাণ বা মানের) গড় পরিবর্তন ভিত্তিকালের শতকরায় প্রকাশ করা হয়। ভিত্তিকালকে সাধারণত 'o' এবং চলতিকালকে সাধারণত 'n' দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

একটি পণ্যের সূচক সংখ্যার জন্য নিম্নলিখিত প্রতীকগুলি ব্যবহার করা হয়ে থাকে :

P_o = পণ্যের ভিত্তিকালের দর (Base Period Price of the Commodity)

P_n = পণ্যের চলতি কালের দর (Current Period Price of the Commodity)

q_o = ভিত্তিকালে পণ্যটির ব্যবহারের পরিমাণ (Base Period Quantity used of the Commodity)

q_n = চলতিকালে পণ্যটির ব্যবহারের পরিমাণ (Current Period Quantity used of the Commodity)।

ভিত্তিকাল থেকে চলতিকালে দর-এর পরিবর্তন দুভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে—

(i) প্রকৃত পরিমাপ $P_n - P_o$ অথবা (ii) আপেক্ষিক পরিমাপ $\frac{P_n}{P_o}$ দিয়ে। অনুরূপভাবে, $q_n - q_o$ পরিমাণের প্রকৃত পরিমাপ ও $\frac{q_n}{q_o}$ পরিমাণের আপেক্ষিক পরিমাপ (Quantity Relative) নির্দেশ করে। যেহেতু আপেক্ষিক পরিবর্তন কোনও একক নির্ভর নয়, তাই একে অপেক্ষাকৃত ভালো পরিমাপ ধরা হয়। ভিন্ন ভিন্ন আপেক্ষিক দর (পরিমাণ বা মান)-গুলির একটি গড় নির্ণয় করে তাকে দর (পরিমাণ বা মূল্য)-এর সূচক বলে অভিহিত করা হয়।

7.3 সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের সমস্যসমূহ

সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের সময় যে সব সমস্যার সন্মুখীন হতে হয় সেগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক। নিম্নে যে সমস্যাগুলি আলোচিত হবে সেগুলি সমগুরুত্ব সম্পন্ন নাও হতে পারে এবং পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত হতেও পারে। সমস্যাগুলি নিম্নরূপ :

(i) সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের উদ্দেশ্য (Purpose of Constructing Index Number)

(ii) ভিত্তিকাল নির্বাচন (Choice of Base Period)

(iii) পণ্যদ্রব্য নির্বাচন (Choice of Commodity)

(iv) তথ্য সংগ্রহ (Collection of Data)

(v) রাশিতথ্যের একত্রীকরণ ও ভার নির্বাচন (Method of Combining Data and Choice of Weights)

(vi) নির্ণীত সূচক সংখ্যার ব্যাখ্যা (Interpretation of Index Number)

(i) সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের উদ্দেশ্য :

সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের আগে তার নির্ণয়ের উদ্দেশ্য স্পষ্ট ও দ্বার্থহীনভাবে জানতে হবে, কারণ পরবর্তী সমস্যাগুলি সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের উদ্দেশ্যের ওপর নির্ভর করে। বস্তুত এমন কোনও সূচক সংখ্যার কথা ভাবা যায় না যা সবক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যাবে। উদ্দেশ্য অনুযায়ী একটি বিশেষ প্রকারের সূচক সংখ্যার প্রয়োগ যথোপযুক্ত হবে। যথার্থ উদ্দেশ্যযুক্ত একটি সূচক সংখ্যা উপযোগী, কিন্তু উদ্দেশ্যহীন একটি সূচক সংখ্যা ক্ষতিকর। উদাহরণস্বরূপ, জীবিকা নির্বাহন সূচক সংখ্যা (Cost of Living Index Number)-এর কথা ধরা যাক। এই সূচক নির্ণয়ের জীবন ধারণের জন্য অত্যাবশ্যক পণ্যদ্রব্য যথা—চাল, ডাল, কাপড় ইত্যাদির খুচরা দরের তথ্য সংগ্রহ করতে হয়, যেহেতু দৈনন্দিন ব্যবহারের জন্য লোকে এগুলি খুচরা দরে কিনে থাকে। আবার এই সব দর সাধারণভাবে দেশের মূল্যমানের

গতিপ্রকৃত জানার উদ্দেশ্যে নির্মিত পাইকারি দরের সূচক (Wholesale Price Index) নির্ণয়কালে ব্যবহার করা যাবে না। ইহা নির্ণয়ের জন্য পণ্যদ্রব্যের পাইকারি দর সংগ্রহ করতে হবে।

(ii) ভিত্তিকাল নির্বাচন :

সূচক সংখ্যা ভিত্তিকালের সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয়। সেজন্য ভিত্তিকাল নির্ণয়ের সময় বিশেষ সতর্কতা নেওয়া দরকার। মোটামুটি একটি স্বাভাবিক সময়কে ভিত্তিকাল হিসাবে ধরা উচিত। ঐ সময়ে পণ্যদ্রব্যের দর বা পরিমাণের মধ্যে যেন কোনও অস্বাভাবিকতা না থাকে অর্থাৎ যেন ঐ সময়ে কোনও বিশেষ কারণে পণ্যের দর হঠাৎ খুব বেড়ে না যায় (যেমন যুদ্ধের সময়) বা কমে না যায় (যেমন মন্দার সময়)।

ভিত্তিকাল ও চলতিকালের মধ্যে পার্থক্য খুব বেশি হওয়া উচিত নয়। সময়ের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে বাজারের অবস্থা অর্থাৎ মানুষের চাহিদা ও অভ্যাসের পরিবর্তন হয়। তাই ভিত্তিকাল ও চলতিকালেরে মধ্যে সময়ের পার্থক্য বেশি হলে বাজারের অবস্থা ও জনসাধারণের জীবনযাত্রার মান যথার্থ তুলনা করা যায় না। ভিত্তির কাল খুব বেশি পুরানো হলে সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের সময় ভিত্তিকালের অনেক পণ্য চলতিকালে বাজারে পাওয়া যায় না বা পাওয়া খুব কষ্টকর হয়। এই কারণে ভিত্তিকাল খুব পুরানো হয়ে গেলে তাকে অপেক্ষাকৃত নিকটবর্তী কালে সরিয়ে আনতে হবে।

ভিতিতকালের দৈর্ঘ্য খুব বেশি হওয়া বা কম হওয়া উচিত নয়। খুব বেশি হলে (যেমন আট বা দশ বছর) ঐ দীর্ঘ সময়ের গড় নেওয়ার ফলে বিভিন্ন পণ্যদ্রব্যের ওঠানামা পরিষ্কারভাবে বোঝা যায় না। আবার দৈর্ঘ্য খুব কম হলে (অর্থাৎ একদিন বা একসপ্তাহ) এই স্বল্প সময়ের মধ্যে পণ্যের দরের অস্বাভাবিক হ্রাসবৃদ্ধি হওয়া সম্ভব। যেমন, বিয়ে, অন্নপ্রশন প্রভৃতি অনুষ্ঠানের দিন বাজারে মাছের দাম স্বাভাবিক দামের চেয়ে বেশি হতে পারে।

(iii) পণ্যদ্রব্য নির্বাচন :

সময়, অর্থ ও শ্রমের বাধ্য বাধকতার জন্য বাজারের প্রত্যেকটি পণ্যকে সূচক সংখ্যার অন্তর্ভূক্ত করা সম্ভব নয়। সূচক সংখ্যার ব্যবহারিক প্রয়োগের জন্য একটি নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে তা সঙ্কলন করা হয়, নতুবা তা অর্থহীন হয়ে যায়। তাই নমুনা হিসাবে কিছু প্রতিনিধিমূলক পণ্যের দর সংগ্রহ করা হয়ে থাকে। পণ্যগুলি এমনভাবে নির্ধারণ করা হয় যাতে এদের গড় দরের গতিবিধি বাজারের সকল দ্রব্যের গড় দরের কাছাকাছি হয়। সেইজন্য পণ্যদ্রব্যের নির্বাচন উদ্দেশ্যমূলক বা বিচারভিত্তিক নমুনা সংগ্রহ পদ্ধতি (Judgement Sampling Method)-তে করা হয়ে থাকে। এই পদ্ধতিতে কতগুলি গুরুত্বপূর্ণ পণ্য, যেমন চাল, গম, তেল, চিনি নিতেই হয় এবং বাকি পণ্যের চয়ন সমসম্ভব উপায়ে করতে হবে।

নমুনা সংগ্রহের জন্য পণ্যগুলিকে কয়েকটি প্রধান প্রধান গোষ্ঠীতে (Group-এ) ভাগ করা হয়। যেমন, জীবিকা নির্বাহন ব্যয়ের সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের সময় পণ্যগুলিকে সাধারণত পাঁচটি ভাগে ভাগ করা হয়—খাদ্য, আলো ও জ্বালানী, বস্ত্র, বাসস্থান এবং বিবিধ। গোষ্ঠীর আবার উপগোষ্ঠী (Sub-Group) থাকতে পারে। যেমন, খাদ্যের উপগোষ্ঠীগুলি হল তণ্ডুলজাতীয় খাদ্য, মাছ-মাংস, তরকারী ইত্যাদি। তণ্ডুলজাতীয় খাদ্যের মধ্যে রয়েছে চাল, গম, জোয়ার, বাজরা ইত্যাদি।

নমুনা সংখ্যা (Sample Size) কত হবে তার কোনও বাঁধাধরা নিয়ম নেই। তবে সংখ্যা খুব বড় কিংবা খুব ছোট হওয়া উচিত নয়। খুব বড় নমুনা হলে বাস্তব কিছু অসুবিধা থাকে, আবার খুব ছোট হলে তা কোনও গোষ্ঠী বা উপগোষ্ঠীর প্রকৃত প্রতিনিধি হতে পারে না।

(iv) তথ্য সংগ্রহ :

একজন রাশি তথ্য সংগ্রাহককে সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে ব্যবহৃত তথ্য সংগ্রহের জন্য প্রচুর বেগ পেতে হয়, যেহেতু একই পণ্যের বিভিন্ন স্থানে (এমনকি একই স্থানে) দর বিভিন্ন রকম হয়। আবার গুণগত মান (Quality)-এর তারতম্যের জন্য দরও বিভিন্ন রকম হতে পারে। যেমন, একই বাজারে বিক্রীত চালের দাম বিভিন্ন হয়, আবার চালের গুণমান বিভিন্ন হওয়ার জন্যও দর বিভিন্ন হয়। তাছাড়া সঠিক দর যাতে সংগৃহীত হয় তার প্রতি দৃষ্টি দেওয়া দরকার। জীবিকা নির্বাহন ব্যয়ের সূচকের জন্য খুচরা দর সংগ্রহ করা হয়, অপরপক্ষে পাইকারি দরের সূচকের ক্ষেত্রে পাইকারি দর সংগ্রহ করা হয়ে থাকে।

(v) রাশিতথ্যের একত্রীকরণ ও ভার নির্বাচন (Method of Combining Data and Choice of weights) :

সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি বা সূত্র প্রয়োগ করা হয়। নিম্নে প্রদত্ত ছকে প্রধান প্রধান পদ্ধতি বা সূত্রগুলি দেওয়া হল :

সূচক সংখ্যা নির্ণয় (Construction of Index Number)

- সমষ্টিগত পদ্ধতি (Aggregative Method)
  - সরল সমষ্টিগত পদ্ধতি (Simple Aggregative Method)
  - ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতি (Weighted Aggregative Method)
    - লাস্পেয়ার্সের সূত্র (Laspeyres' Formula)
    - পাশের সূত্র (Paasche's Formula)
    - মার্শল-এজওয়ার্থ সূত্র (Marshall-Edgewarth Formula)
    - ফিসারের আদর্শসূচক সংখ্যা (Fisher's Ideal Index Number Formula)
    - বাওলের সূত্র (Bowley's Formula)
- আপেক্ষিক পদ্ধতি (Relative Method)
  - আপেক্ষিকগুলির সরল গড় (Simple Relative Average)
  - আপেক্ষিকগুলির ভারযুক্ত গড় (Weighted Relative Average)

সরল সমষ্টিগত পদ্ধতি :

এই পদ্ধতিতে পণ্যগুলির দরের সরল সমষ্টির চলতিকালের মানের সঙ্গে ভিত্তিকালের মান তুলনা করা হয়। সূত্রটি নিম্নরূপ :

$$\text{সূচক} \quad I_{on} = \frac{\sum P_{ni}}{\sum P_{oi}} \times 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

যেখানে P_{ni} হল i-তম পণ্যের চলতিকালের দর এবং P_{oi} হল i-তম পণ্যের ভিত্তিকালের দর। সকল পণ্যের জন্য সমষ্টি ($\sum$) নেওয়া হয়েছে।

একে সরল সমষ্টিগত সূচক সংখ্যা (Simple Aggregative Index Number) বলা হয়। এই সূত্রের প্রধান অসুবিধা হচ্ছে, এখানে প্রতিটি এককের দরের ওপর নির্ভর করা হয় এবং সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে বিভিন্ন পণ্যের গুরুত্ব (বা ভার) সমান ধরা হয়েছে যা বাস্তবে সব সময় ঠিক নয়। যেমন, ভারতে পাইকারি দরের সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের সময় চাল ও গমকে তামাক ও মদ অপেক্ষা বেশি গুরুত্ব দেওয়া উচিত। এই অসুবিধা দূর করা জন্য ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়।

ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতি (Weighted Aggregative Method) :

এই পদ্ধতিতে চলতি ও ভিত্তিকালে পণ্যগুলিকে যথোপযুক্ত ভারসম্পন্ন করে চলতিকালের পণ্যগুলির মোট মূল্যকে ভিত্তিকালের পণ্যগুলির মোট মূল্যের শতকরায় প্রকাশ করা হয়। এই পদ্ধতিতে দরের সূচক সংখ্যা হল :

$$I_{on} = \frac{\sum P_{ni} w_i}{\sum P_{oi} w_i} \times 100 \text{ .... } (2)$$

যেখানে P_{oi} ও P_{ni} পূর্বে উল্লেখ করা হয়েছে এবং w_i, i-তম পণ্যের ভার ধরা হয়েছে।

ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতিতে দরের সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের অধিকাংশ ক্ষেত্রে পরিমাণ (Quantity)-কে ভার হিসাবে ধরা হয়। চলতি বা ভিত্তিকালের পরিমাণকে ভার হিসাবে গুরুত্ব দিয়ে নিম্নে প্রদত্ত বিভিন্ন সূত্র দরের সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের প্রয়োগ করা হয় :

(ক) লাস্‌পেয়ার্সের সূত্র (Laspeyres' Formula) :

এই সূত্রে ভিত্তিকালের পণ্যদ্রব্যের পরিমাণকে পণ্যদ্রব্যের দরের ভার হিসাবে ধরা হয় অর্থাৎ $W_i = q_{oi}$ = ভিত্তিকালে i-তম পণ্যের পরিমাণ ধরা হয়। সুতরাং লাস্‌পেয়ার্সের সূত্রানুযায়ী, পণ্যের দরের সূচক সংখ্যা I_{on}^{L} হলে

$$I_{on}^{L} = \frac{\sum P_{ni} q_{oi}}{\sum P_{oi} q_{oi}} \times 100 \text{......... } (3)$$

সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের এই সূত্রের ব্যবহার সবচাইতে ব্যাপক। কারণ হল, অন্যান্য সূত্রের তুলনায় এই সূত্র বাস্তবে অনেক সহজে ব্যবহার করা যায়। এই সূত্রে যেহেতু ভার হিসাবে ভিত্তিকালের পরিমাণ ব্যবহার করা হয়, এর রাশিতথ্য সংগ্রহ অপেক্ষাকৃত সহজ হয়।

এই সূচক সংখ্যা দরের স্তরের বৃদ্ধি প্রকাশ করতে পারে নির্দিষ্ট ভার q_{oi}-এর জন্য, যেখানে চলতিকালে ভোক্তা সমান সন্তুষ্টির জন্য যেসব পণ্যের দর অপেক্ষাকৃত কম সেগুলি বেশি পরিমাণে কিনে এবং যেগুলির দর আপেক্ষিকভাবে বেশি সেগুলি কম কিনে মোট খরচ কমাতে পারে। সেই অর্থে লাস্‌পেয়ার্সের সূচক সংখ্যাকে ঊর্ধ্বমুখী পক্ষপাতদুষ্ট (Upward Biased) বলা হয়।

(খ) পাশের সূত্র (Paasche's Formula) :

এই সূত্রে চলতিকালের পণ্যদ্রব্যের পরিমাণকে পণ্যদ্রব্যের দরের ভার হিসাবে ধরা হয়, অর্থাৎ $w_i = q_{ni}$ = চলতিকালে i-তম পণ্যের পরিমাণ ধরা হয়। সুতরাং, পাশের সূত্রানুযায়ী, পণ্যের দরের সূচক সংখ্যা I_{on}^{P} হলে,

$$I_{on}^{P} = \frac{\sum P_{ni}q_{ni}}{\sum P_{oi}q_{ni}} \times 100 \text{ .... } (4)$$

(গ) মার্শাল-এজওয়ার্থ সূত্র (Marshall-Edgeworth Formula) :

এই সূত্রে চলতি ও ভিত্তিকালের পরিমাণের গড়কে পণ্যদ্রব্যের দরের ভার হিসাবে ধরা হয়। সুতরাং, মার্শাল-এজওয়ার্থ সূত্রনুযায়ী, পণ্যের দরের সূচক সংখ্যা I_{on}^{M-E} হলে,

$$I_{on}^{M-E} = \frac{\sum P_{ni}(q_{oi} + q_{ni})}{\sum P_{oi}(q_{oi} + q_{ni})} \times 100 \text{ .... } (5)$$

এই সূত্রটি লাস্‌পেয়ার্সের সূত্রে উর্ধ্বমুখী পক্ষপাত ও পাশের সূত্রের নিম্নমুখী পক্ষপাতের মধ্যে সমতা বিধানকারী। যদিও এই সূত্রের মধ্যে কোনও সাধারণ পক্ষপাত নেই, তবে এর গণনা কার্য কষ্টসাধ্য।

(ঘ) ফিশারের আদর্শ সূচক সংখ্যা (Fisher's Ideal Index Number) :

লাস্‌পেয়ার্সের সূচক সংখ্যা এবং পাশের সূচক সংখ্যার গুণোত্তর গড় (G.M.)-কে ফিশারের আদর্শ সূচক সংখ্যা বলা হয়। সুতরাং, ফিশারের সূচক সংখ্যা I_{on}^{F} হলে,

$$I_{on}^{F} = \sqrt{\frac{\sum P_{ni}q_{oi}}{\sum P_{oi}q_{oi}} \times \frac{\sum P_{ni}q_{ni}}{\sum P_{oi}q_{ni}}} \times 100 \text{ ....} (6)$$

(ঙ) লাস্‌পেয়ার্স ও পাশ-এর সূচক সংখ্যার যৌগিক গড়কে বাওলের সূচক সংখ্যা (Bowley's Index) বলা হয়, অর্থাৎ

$$I_{on}^{B} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sum P_{ni}q_{oi}}{\sum P_{oi}q_{oi}} + \frac{\sum P_{ni}q_{ni}}{\sum P_{oi}q_{ni}}\right] \times 100 \text{ .... } (7)$$

আপেক্ষিক পদ্ধতি (Relative Method) :

যে সংখ্যার সাহায্যে চলতিকালের কোন দরকে ভিত্তিকালের দরের সাপেক্ষে প্রকাশ করা হয়, তাকে আপেক্ষিক দর (Price Relative or Only Relative) বলা হয়। আপেক্ষিক পরিমাণের ক্ষেত্রেও একই ভাবে প্রকাশ করা যায়। সুতরাং, কোনও পণ্যের ক্ষেত্রে,

$$\text{আপেক্ষিক দর} = \frac{\text{চলতিকালের দর}}{\text{ভিত্তিকালের দর}} = \frac{P_n}{P_o}$$

আপেক্ষিক দর পদ্ধতি দরের সূচক সংখ্যা নির্ণয় করা হয় পণ্যগুলির আপেক্ষিক দরগুলির গড়ের সাহায্যে সাধারণত সরল কিংবা ভারযুক্ত যৌগিক গড় (A.M.) অথবা গুণোত্তর গড় (G.M.) ব্যবহৃত হয়।

(ক) আপেক্ষিক দরের সরলযৌগিক গড় পদ্ধতি (Simple Averages of Price Relatives) :

$$I_{on} = \frac{1}{k}\sum\frac{P_{ni}}{P_{oi}} \times 100\text{.........} \quad (8)$$

যেখানে সমষ্টি ($\sum$) সকল k পণ্যের আপেক্ষিক দরের ওপর নেওয়া হয়েছে। যদি সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে সরল গুণোত্তর গড় ব্যবহার করা হয়, তবে

$$I_{on} = \left\{\Pi\left(\frac{P_{ni}}{P_{oi}}\right)\right\}^{1/k} \times 100 \text{ ....} \quad (9)$$

যেখানে গুণফল (Π) সকল k পণ্যের আপেক্ষিক দরের ওপর নেওয়া হয়েছে। এছাড়া দরের আপেক্ষিক মানের সরল বিবর্ত যৌগিক গড়, সংখ্যাগুরুমান বা মধ্যমা ব্যবহার করা যায়।

(খ) আপেক্ষিক দরের ভারযুক্ত গড় পদ্ধতি (Weighted Average of Price Relatives) :

আপেক্ষিক দরের সরল যৌগিক গড় পদ্ধতিতে কোনও একটি আপেক্ষিক দরের দ্বারা সূচকের হ্রাস বৃদ্ধি প্রভাবিত হতে পারে। তাই ভারযুক্ত সমষ্টিগত পদ্ধতির মতো আপেক্ষিক দরের ভারযুক্ত গড় পদ্ধতিতে আপেক্ষিক দরের ভার (Weight) যুক্ত করা হয়। এখানে ভার হিসাবে বিক্রীত বা উৎপাদিত পণ্যের মূল্য (Value) কোনও একটি নির্দিষ্ট সময়ের ভিত্তিতে ধরা হয়।

যদি W_i, i-তম পণ্যের আপেক্ষিক দরের ভার হয়, তবে ভারযুক্ত আপেক্ষিক দরের যৌগিক গড় (Weighted Arithmetic Mean of Price Relatives) হল

$$I_{on} = \frac{\sum\frac{P_{ni}}{P_{oi}}W_i}{\sum W_i} \times 100\text{......} \quad (10)$$

ভারযুক্ত আপেক্ষিক দরের গুণোত্তর গড় (Weighted Geometric Mean of Price Relatives) হল,

$$I_{on} = \left\{\Pi\left(\frac{P_{ni}}{P_{oi}}\right)^{W_i}\right\}^{1/\sum w_i} \times 100\text{........} \quad (11)$$

এবং ভারযুক্ত আপেক্ষিক দরের বিবর্ত যৌগিক গড় (Weighted Harmonic Mean of Price Relatives) হল,

$$I_{on} = \frac{\sum W_i}{\sum \frac{P_{oi}}{P_{ni}}} \times 100 \text{ .... } (12)$$

(10) নং সূত্রে $W_i = P_{oi}q_{oi}$ এবং (12) নং সূত্রে $W_i = P_{ni}q_{ni}$ ধরলে যথাক্রমে লাস্‌পেয়ার্সের সূত্র এবং পাশের সূত্র পাওয়া যায়।

(vi) নির্ণীত সূচক সংখ্যার ব্যাখ্যা (Interpretation of Index Number) :

সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের উদ্দেশ্যের ওপর নির্ণীত সূচক সংখ্যার ব্যাখ্যা নির্ভর করে। ভিত্তিকাল ও চলতিকালে জীবনযাত্রার মান একই রাখতে হলে চলতিকালে জীবিকা নির্বাহ ব্যায় ভিত্তিকালের তুলনায় কতটা বেশি বা কম হবে তা জীবন নির্বাহন ব্যয়ের সূচক (Cost of Living Index) দ্বারা নির্দেশিত হয়, আবার ভিত্তিকালের তুলনায় চলতিকালের সাধারণ মূল্যমানের হেরফের পাইকারি দরের সূচক (Wholesale Price Index) দ্বারা নির্দেশিত হয়ে থাকে। ভিত্তিকালের শিল্পোৎপাদনের তুনলায় চলতি কালের শিল্পোৎপাদনের হ্রাসবৃদ্ধি শিল্পোৎপাদনের পরিমাণ সূচক (Quantity Index of Industrial Production) দ্বারা নির্দেশিত হয়।

সাধারণত সূচক সংখ্যাকে শতকরা হিসাবে প্রকাশ করা হয় এবং I_{oo}, অর্থাৎ ভিত্তিকালের সূচক সংখ্যাকে 100 ধরা হয়। "1980-81-কে ভিত্তিকাল ধরে 1990 সালের সর্বভারতীয় পাইকারি দরের সূচক 1.946" —বলতে বোঝায় 1980-81 সালের তুলনায় 1990 সালে পাইকারী মূল্যমান 1.946 গুণ বৃদ্ধি পেয়েছে।

উদাহরণ ১. পশ্চিমবঙ্গ সরকারের ফলিত অর্থনীতি ও পরিসংখ্যান ব্যুরো (Bureau of Applied Economics and Statistics) কর্তৃক নিম্নলিখিত রাশিতথ্য সংগৃহীত হয়েছে। 1962 সালকে ভিত্তিকাল ধরে বিভিন্ন সূত্রানুযায়ী 1963 সালের সূচক নির্ণয় করান।

পণ্যের দাম	**1962 (জানুয়ারি)**		**1963 (জানুয়ারি)**	
	প্রতি 100 কেজির দর (টাকায়)	**ব্যবহারের পরিমাণ (মেট্রিক টন)**	**প্রতি 100 কেজির দর (টাকায়)**	**ব্যবহারের পরিমাণ (মেট্রিক টন)**
1. চাল	55.50	7391	70.20	12839
2. গম	37.52	2381	37.52	5377
3. ছোলার ডাল	56.95	50	52.26	400
4. সরিষা তৈল	256.00	6610	239.50	3380
5. চিনি	107.70	15036	117.41	15707

সমাধান : গণনাকার্য :

	1962				1963			
পণ্যের দাম	P_o	q_o	p_n	q_n	p_oq_o	p_nq_o	p_oq_n	p_nq_n
1. চাল	55.50	7391	70.20	12839	410200.50	518848.20	712564.50	901297.80
2. গম	37.52	2381	37.52	5377	89335.12	89335.12	201745.04	201745.04
3. ছোলার ডাল	56.95	50	52.26	400	2847.50	2613.00	2278.00	20904.00
4. সরিষা তেল	256.00	6610	239.50	3380	1692160.00	1583095.00	865280.00	809510.00
5. চিনি	107.70	15036	117.41	15707	1619377.20	1765376.76	1691643.90	18441588.87
মোট	–	–	–	–	3813920.32	3959268.08	3494013.44	3777615.71

(i) লাস্‌পার্সের সূচক $(I_{on}^{L}) = \frac{\sum p_{ni}q_{oi}}{\sum p_{oi}q_{oi}} \times 100 = \frac{3959268.08}{3813920.32} \times 100 = 103.8$

(ii) পাশের সূচক $(I_{on}^{p}) = \frac{\sum p_{ni}q_{ni}}{\sum p_{oi}q_{ni}} \times 100 = \frac{3777615.71}{3494013.44} \times 100 = 108.1$

(iii) মার্শাল-এজওয়ার্থের সূচক $(I_{on}^{M-E}) = \frac{\sum p_{ni}(q_{oi}+q_{ni})}{\sum p_{oi}(q_{oi}+q_{ni})} \times 100$

$$= \frac{\sum p_{ni}q_{oi} + \sum p_{ni}q_{ni}}{\sum p_{oi}q_{oi} + \sum p_{oi}q_{ni}} \times 100$$

$$= \frac{3959268.08 + 3777615.71}{3813920.32 + 3494013.44} \times 100 = 105.9$$

(iv) ফিশারের আদর্শ সূচক সংখ্যা $(I_{on}^{F}) = \sqrt{I_{on}^{L} \times I_{on}^{P}} = \sqrt{103.8 \times 108.1} = 105.9$

উদাহরণ ২. নিম্নে প্রদত্ত তথ্য থেকে সূচক সংখ্যা নির্ণয় করুন, (i) আপেক্ষিক দরের সরল গড় ও (ii) আপেক্ষিক দরের গুণোত্তর গড় পদ্ধতিতে।

পণ্যদ্রব্য	A	B	C	D	E
1988 সালে দাম (টাকায়)	10	18	12	20	25
1990 সালে দাম (টাকায়)	12	16	10	8	8

সমাধান : মনে কর, p_o এবং p_n যথাক্রমে 1988 সালে ও 1990 সালের দর।

গণনা কার্য :

পণ্যদ্রব্য	p_o	p_n	$\frac{p_n}{p_o} \times 100$	$\log\left(\frac{p_n}{p_o} \times 100\right)$
A	10	12	120.00	2.0792
B	18	16	88.89	1.9488
C	12	10	83.33	1.9208
D	20	8	40.00	1.6021
E	25	8	32.00	1.5051
মোট	—	—	364.22	9.0560

(i) আপেক্ষিক দরের সরলগড় পদ্ধতিতে সূচক সংখ্যা = $\frac{364.22}{5}$ = 72.84

(ii) আপেক্ষিক দরের গুণোত্তর গড় পদ্ধতিতে সূচক সংখ্যা = Anti $\log\left(\frac{9.0560}{5}\right)$

= Anti log (1.8112) = 64.74

7.4 জীবিকা নির্বাহন ব্যয়ের সূচক (Cost of Living Index or Consumer Price Index)

দুটি ভিন্ন সময়ে সম পরিমাণ জীবনযাত্রার মান বজায় রাখার জন্য যে পরিমাণ অর্থের প্রয়োজন হয় তাদের আপেক্ষিক পরিবর্তনের পরিমাপ জীবিকা নির্বাহন ব্যয়ের সূচক (Cost of Living Index সংক্ষেপে C.L.I. or Consumer Price Index সংক্ষেপে C.P.I.) দিয়ে প্রকাশ করা হয়। বিভিন্ন শ্রেণীর জনসাধারণের (বা ভোক্তার) জীবনযাত্রার প্রণালী বিভিন্ন। মধ্যবিত্ত শ্রেণী, কারখানার শ্রমিকশ্রেণী বা কৃষকশ্রেণীর জীবনযাত্রার মধ্যে পার্থক্য আছে। আবার উচ্চ আয়ের লোক, মধ্যম আয়ের লোক এবং নিম্ন আয়ের লোকেদের জীবনযাত্রা প্রণালী বিভিন্ন। এরূপ প্রতিটি ভিন্ন শ্রেণীর জনসাধারণের জন্য আলাদা আলাদা জীবিকা নির্বাহন ব্যয়ের সূচক সংখ্যা নির্ণয় করা হয়ে থাকে। বাস্তবক্ষেত্রে, দুটি ভিন্ন অবস্থায় একটি নির্দিষ্ট শ্রেণীর পণ্য ও পরিষেবার উপভোক্তার দর (বা খুচরা দর) তুলনা করে এই সূচক নির্ণয় করা হয়।

এই সূচক নির্ণয়ের জন্য জীবিকা নির্বাহের জন্য প্রয়োজনীয় ভোগ্য পণ্যগুলিকে প্রথমে কয়েকটি প্রধান গোষ্ঠী বা বিভাগে (Major Group) ভাগ করা হয়। সাধারণত নিম্নলিখিত পাঁচটি প্রধান বিভাগ নেওয়া হয়— (1) খাদ্য (Food), (2) বস্ত্র (Clothing), (3) জ্বালানী ও আলো (Light and Fuel), (4) বাসস্থান (Housing) এবং (5) বিবিধ (Miscellaneous)।

প্রত্যেকটি প্রধান বিভাগের জন্য ঐ বিভাগের প্রতিনিধিস্থানীয় (Representative) কয়েকটি ভোগ্য পণ্যের নমুনা নেওয়া হয়। যেমন খাদ্য (Food)-এর অন্তর্ভুক্ত করা হয় চাল, গম, তরকারি, মাছ, মাংস, ফল, তেল, লবণ, মসলা, ঘি ইত্যাদি। এদের সাহায্যে প্রত্যেকটি প্রধান বিভাগের জন্য একটি করে সূচক সংখ্যা নির্ণয় করা হয়। সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে প্রতিনিধিস্থানীয় ভোগ্যপণ্যগুলির আপেক্ষিক দরের ভারযুক্ত গড় নেওয়া হয়। কোনও পণ্যের ভার ভোক্তাদের কাছে ঐ পণ্যের গুরুত্ব অনুযায়ী স্থির করা হয়।

কোনও একটি পণ্যের আপেক্ষিক দর বিভিন্ন বাজার বা দোকান থেকে সংগৃহীত ঐ পণ্যের বিভিন্ন আপেক্ষিক দরসমূহের ভারহীন গড়। কোনও প্রধান গোষ্ঠীর জন্য মোট খরচের যত শতাংশ ভোক্তাগণ ঐ বিভাগের অন্তর্ভুক্ত একটি পণ্যের জন্য খরচ করে থাকে, তাকে ঐ পণ্যের ভার হিসাবে ধরা হয়। এই প্রণালীতে প্রত্যেকটি প্রধান বিভাগের জন্য একটি করে সূচক সংখ্যা নির্ণয় করা হয়। সার্বিক বা মূল সূচক সংখ্যা (General Index) টি প্রধান বিভাগগুলির সূচক সংখ্যাগুলির ভারযুক্ত গড়। ভোগ্য পণ্যের জন্য মোট ব্যয়ের যত শতাংশ একটি প্রধান বিভাগের জন্য খরচ করা হয়, তাকে ঐ বিভাগের সূচক সংখ্যার ভার হিসাবে নেওয়া হয়।

ভিন্ন ভিন্ন শ্রেণীর ভোক্তার পণ্য ব্যবহারের আপেক্ষিক গুরুত্ব যেহেতু ভিন্ন ভিন্ন, তাই জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক নির্ণয়ে ভার যথাযথভাবে প্রয়োগ করতে হয়। পাঁচটি প্রধান গোষ্ঠীর সূচক সংখ্যা নিম্নলিখিত পদ্ধতিগুলির যে কোনও একটির সাহায্যে নির্ণয় করা হয় :

(i) সমষ্টিগত ব্যয় পদ্ধতি বা সমষ্টিগত পদ্ধতি (Aggregate Expenditure Method or Aggregate Method)

(ii) পারবারিক আয়-ব্যয়ক সমীক্ষা বা ভারযুক্ত আপেক্ষিক পদ্ধতি (Family Budget Enquiry or Method of Weighted Relatives)

(i) সমষ্টিগত ব্যয় পদ্ধতি বা সমষ্টিগত পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে, নির্দিষ্ট কোনও প্রধান বিভাগের পণ্যগুলির ভিত্তিকালে ক্রয়ের পরিমাণ বা তার খণ্ড ভগ্নাংশকে ভার হিসাবে ধরা হয় এবং ভিত্তিকালের সাপেক্ষে চলতিকালে ভারযুক্ত দরের সমষ্টিকে ঐ বিভাগের সূচক সংখ্যা হিসাবে ধরা হয়। অর্থাৎ,

$$\text{বিভাগীয় সূচক সংখ্যা (I)} = \frac{\sum p_{ni}q_{oi}}{\sum p_{oi}q_{oi}} \times 100$$

যা লাস্‌পেয়ার্সের সূত্রের সঙ্গে সমান।

(ii) পারিবারিক আয়-ব্যয়ক সমীক্ষা বা ভারযুক্ত আপেক্ষিক পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে, যে শ্রেণীভুক্ত ব্যক্তিদের জীবিকা নির্বাহন ব্যয়সূচক নির্ণয় করতে হবে তাদের সম্পর্কে “পারিবারিক আয় ব্যয়ক সমীক্ষা” (Family Budget Enquiry) কাজ করতে হয়। এই সমীক্ষার ফলে নির্দিষ্ট শ্রেণীভুক্ত সাধারণ পরিবার (Average Family) কোন্ কোন্ পণ্যদ্রব্য কী পরিমাণে ব্যবহার করতে অভ্যস্ত সে সম্পর্কে তথ্য সংগ্রহ করা হয়। কোন্ পণ্যের জন্য কী পরিমাণ অর্থ ব্যয় করে তার তথ্য সংগ্রহ করে তা থেকে সূচকের জন্য ভার নির্ণয় করা হয়। পারিবারিক আয়-ব্যয়ক সমীক্ষায়

ভিত্তিকালে সম্ভাব্য নমুনা চয়ন (Random Sampling) পদ্ধতিতে তথ্য সংগ্রহ করে ভার হিসাবে ভিত্তিকালের মান (i.e. $p_o q_o$)-কে ধরা হয়। সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে আপেক্ষিক দরের ভারযুক্ত গড়কে ব্যবহার করা হয়। অর্থাৎ,

$$\text{বিভাগীয় সূচক সংখ্যা (I)} = \frac{\sum \frac{p_{ni}}{p_{oi}} \times W_i}{\sum w_i} \times 100$$

$$= \frac{\sum \frac{p_{ni}}{p_{oi}} \times p_{oi} q_{oi}}{\sum p_{oi} q_{oi}} \times 100 \ [\text{ যেহেতু } w_i = p_{oi} q_{oi} \ ]$$

$$= \frac{\sum p_{ni} q_{oi}}{\sum p_{oi} q_{oi}} \times 100$$

যা সমষ্টিগত পদ্ধতিতে লাস্‌পেয়ার্সের সূত্রের সঙ্গে সমান।

প্রয়োগক্ষেত্রে, নির্দিষ্ট শ্রেণীভুক্ত সাধারণ পরিবারে ব্যবহৃত প্রত্যেকটি পণ্যের ব্যয়কে ঐ শ্রেণীর মোট ব্যয়ের শতকরা হিসাবে প্রকাশ করে তাকে ভার (w) হিসাবে নেওয়া হয়, অর্থাৎ

$$w_i = \frac{p_{oi} q_{oi}}{\sum p_{oi} q_{oi}} \times 100$$

$$\text{বিভাগীয় সূচক সংখ্যা (I)} = \frac{\sum \frac{p_{ni}}{p_{oi}} \times w_i}{100} \times 100 = \sum \frac{p_{ni}}{p_{oi}} \times w_i$$

উপরোক্ত দুই প্রকারের যে কোনও পদ্ধতি প্রয়োগ করে শ্রেণীসূচক সংখ্যা নির্ণয় করার পর সার্বিক বা মূলসূচক সংখ্যা (Cost of Living Index or Consumer Price Index) নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় :

$$\text{জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যা} = \frac{\sum I_i W_i}{\sum W_i}$$

যেখানে W_i হচ্ছে শ্রেণী সূচকের ভার যা একটি সাধারণ পরিবারের মোট ব্যয়ের মধ্যে ঐ নির্দিষ্ট শ্রেণীর ব্যয়ের শতকরা পরিমাপ।

যদি শতকরা বিভাগীয় সূচক বৃদ্ধি (%) I' দেওয়া থাকে, তবে জীবিকা নির্বাহন ব্যয়সূচক সংখ্যা = $100 + I'$

$$= 100 + \frac{\sum I_i W_i}{\sum W_i}$$

7.4.1 জীবিকা নির্বাহন ব্যয়ের সূচকের ব্যবহার (Uses of Cost of Living Index Number)

(i) ভিত্তিকালের সমান জীবিকা নির্বাহের মান বজায় রাখার জন্য মহার্ঘ্য ভাতা (Dearness Allowance) ঠিক করার জন্য জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক ব্যবহার করা হয়।

(ii) বেতন, কর এবং অন্যান্য অর্থনৈতিক সিদ্ধান্ত নির্ধারণে সূচক সংখ্যা ব্যবহৃত হয়।

(iii) জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যার অন্যোন্যক (reciprocal)-কে টাকার ক্রয় ক্ষমতা (Purchasing Power of Money)-র নির্ভরযোগ্য পরিমাপ হিসাবে ব্যবহার করা হয়, অর্থাৎ

$$\text{টাকার ক্রয় ক্ষমতা} = \frac{1}{\text{জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক}} \times 100$$

(iv) জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচককে চলতিকালের বেতন (Actual Wage) থেকে প্রকৃত বেতন (Real Wage) নির্ণয়ে ব্যবহার করা হয়।

$$\text{প্রকৃত বেতন (Real Wage)} = \frac{\text{চলতি কালের বেতন (Actual Wage)}}{\text{ঐ সময়ে জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক}} \times 100$$

উদাহরণ ৩. নিম্নে প্রদত্ত ছকে শ্রেণীসূচক সংখ্যা ও তাদের ভার জীবিকা নির্বাহের সাপেক্ষে দেওয়া আছে। জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যা নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	সূচক সংখ্যা	ভার
খাদ্য	360	60
বস্ত্র	295	5
বাসস্থান	110	8
আলো ও জ্বালানী	287	7
বিবধ	315	20

সমাধান :

জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক নির্ণয়ের গণনা কার্য :

শ্রেণী	সূচক সংখ্যা(I)	ভার(W)	IW
খাদ্য	360	60	21500
বস্ত্র	295	5	1475
বাসস্থান	110	8	880
আলো ও জ্বালানী	287	7	2009
বিবিধ	315	20	6300
মোট	—	100	32264

$\therefore$ জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যা $\frac{\sum I_i W_i}{\sum W_i} = \frac{32264}{100} = 322.64$

উদাহরণ ৪. নিম্নে প্রদত্ত ছক থেকে 1985 সালের সাপেক্ষে 1988 সালে জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যা নির্ণয় কর। ইহা হইতে টাকার ক্রয় ক্ষমতা বর্ণনা কর।

পণ্য	খাদ্য	বাসস্থান	বস্ত্র	জ্বালানী	বিবিধ
দাম (1985 সালে)	250	60	80	50	200
দাম (1988 সালে)	270	80	100	50	250
ব্যয় (%)	35	20	15	10	20

একটি কারখানার যে সব শ্রমিক 1985 সালে মাসে 500 টাকা করে বেতন পায় তাদের মহার্ঘ্য ভাতা বাড়ানোর সিদ্ধান্ত হয়। 1988 সালে জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক পরিবর্তনের জন্য মহার্ঘ্য ভাতা কত হওয়া উচিত?

সমাধান : মনে কর, p_0 এবং p_n, 1985 ও 1988 সালের দর এবং W, % ব্যয় প্রকাশ করে।

জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক নির্ণয়ের গণনা কার্য :

পণ্য	p_o	p_n	$I = \frac{p_n}{p_o} \times 100$	W	IW
খাদ্য	250	270	108.00	35	3780.00
বাসস্থান	60	80	133.33	20	2666.60
বস্ত্র	80	100	125.00	15	1875.00
জ্বালানী	50	50	100.00	10	1000.00
বিবিধ	200	250	125.00	20	2500.00
মোট	—	—	—	100	11821.60

জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যা = $\frac{\sum IW}{\sum W} = \frac{11821.60}{100} = 118.22$

সুতরাং, 1985 সালের তুলনায় 1988 সালে জীবিকা নির্বাহের ব্যয় 18.22% বেড়েছে। 1988 সালের টাকার ক্রয় ক্ষমতা = $\frac{1}{118{\cdot}22} \times 100 = 0{\cdot}8459$ অর্থাৎ, 1985 সালে 1 টাকায় যে পরিমাণ পণ্য ক্রয় করা যেত 1988 সালে তার 84·59% পণ্য ক্রয় করা যাবে। সুতরাং, টাকার ক্রয় ক্ষমতা হ্রাস পাওয়ার ফলে 1988 সালে কোনও ব্যক্তির আয় বাড়লেও ক্রয় ক্ষমতা হ্রাস পেতে পারে।

যেহেতু, জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যা 118.22, যে শ্রমিক 1985 সালে 100 টাকা আয় করত তার

1988 সালে 118.22 টাকা আয় করা উচিত। যেহেতু ঐ শ্রমিক 1985 সালে 500 টাকা আয় করত তাই তার 1988 সালে আয় হওয়া উচিত

$\frac{118{\cdot}22}{100} \times 500 = 591{\cdot}10$ টাকা

$\therefore$ মহার্ঘ্য ভাতা (591·10 – 500) টাকা বা 91.10 টাকা হওয়া উচিত।

উদাহরণ ৫. নিম্নলিখিত ছকে একজন লোকের মাসিক আয় এবং জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যা 5 বছরের জন্য দেওয়া আছে :

বছর	1980	1981	1982	1983	1984
আয় (টাকায়)	3600	4200	5000	5500	6000
জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক	100	104	115	160	280

ঐ ব্যক্তির প্রকৃত বেতন নির্ণয় কর। 1980 সালের তুলনায় 1984 সালের টাকার ক্রয় ক্ষমতা নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রকৃত বেতন = $\frac{\text{চলতি কালের বেতন}}{\text{ঐ সময়ের জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক}} \times 100$

প্রকৃত বেতন নির্ণয়ের গণনা কার্য :

বছর	**আয় (টাকায়)**	**জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক**	**প্রকৃত বেতন (টাকায়)**
1980	3600	100	3600.00
1981	4200	104	4038.46
1982	5000	115	4347.83
1983	5500	160	3437.50
1984	6000	280	2142.85

টাকার ক্রয় ক্ষমতা = $\frac{1}{280} \times 100 = 0{\cdot}357$ অর্থাৎ, 1980 সালে 1 টাকায় যে পরিমাণ পণ্য ক্রয় করা যেত 1984 সালে তার 35·7% পণ্য ক্রয় করা যায়। সুতরাং, টাকার ক্রয় ক্ষমতা হ্রাস পেয়েছে। অর্থাৎ, ঐ ব্যক্তির আয় 1984 সালে বৃদ্ধি পেলেও টাকার ক্রয় ক্ষমতা হ্রাস পাওয়ায় উহার ক্রয় ক্ষমতা হ্রাস পাবে।

উদাহরণ ৬. নিম্নলিখিত ছক থেকে খাদ্যশ্রেণীর আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয় কর যখন 1980 সালের সাপেক্ষে 1985 সালের জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যা 175 দেওয়া আছে।

শ্রেণী	**খাদ্য**	**বস্ত্র**	**জ্বালানী**	**বিবিধ**	**বাসস্থান**
ব্যয়ের শতকরা বৃদ্ধি	65	90	20	70	150
ভার	?	12	18	10	20

সমাধান : মনে কর, খাদ্যশ্রেণীর আপেক্ষিক গুরুত্ব x.

গণনা কার্য :

শ্রেণী	**ব্যায়ের % বৃদ্ধি** $(1')$	**ভার (W)**	$1'W$
খাদ্য	65	x	65x
বস্ত্র	90	12	1080
জ্বালানী	20	18	360
বিবিধ	70	10	700
বাসস্থান	150	20	3000
মোট	–	60+x	5140 + 65x

এখন, জীবিকা নির্বাহন ব্যায় সূচকের % বৃদ্ধি = $\frac{\sum I'W}{\sum W}$

অর্থাৎ 75 = $\frac{5140+65x}{60+x}$ [যেহেতু জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যা = 175]

অর্থাৎ, x = 64

সুতরাং, খাদ্যশ্রেণীর আপেক্ষিক গুরুত্ব 64

7.5 পরিমান সূচক সংখ্যা

পরিমান সূচক সংখ্যার সাহায্যে বিভিন্ন স্থানে বা সময়ে ব্যবহৃত সামগ্রীর পরিমাণের গড় পরিবর্তন নির্ণয় করা হয়। "শিল্প উৎপাদন সূচক সংখ্যা", "কৃষি উৎপাদন সূচক সংখ্যা" ইত্যাদি পরিমাণ সূচক সংখ্যার উদাহরণ। এদের মাধ্যমে দেশে উৎপাদিত বহু রকমের শিল্পজাত ও কৃষিজদ্রব্যের দুটি বছরে উৎপাদিত পরিমাণের তুলনা করা যায়।

দর সূচক সংখ্যার সূত্র সমূহের p ও q এর স্থান বিনিময় করলে পরিমাণ সূচক সংখ্যা পাওয়া যায়।

ক্রম	**সূত্র**	**দর সূচক সংখ্যা**	**পরিমাণ সূচক সংখ্যা**
1.	সরল সমষ্টিগত সূচক সংখ্যা	$\frac{\sum p_{ni}}{\sum p_{oi}} \times 100$	$\frac{\sum q_{ni}}{\sum q_{oi}} \times 100$
2.	ভারযুক্ত সমষ্টিগত সূচক সংখ্যা	$\frac{\sum p_{ni} w_i}{\sum p_{oi} w_i} \times 100$	$\frac{\sum q_{ni} w_i}{\sum q_{oi} w_i} \times 100$

ক্রম	সূত্র	দর সূচক সংখ্যা	পরিমান সূচক সংখ্যা
3.	Laspeyres-এর সূত্র	$\frac{\sum p_{ni}q_{oi}}{\sum p_{oi}q_{oi}} \times 100$	$\frac{\sum q_{ni}p_{oi}}{\sum q_{oi}p_{oi}} \times 100$
4.	Paasche-এর সূত্র	$\frac{\sum p_{ni}q_{ni}}{\sum p_{oi}q_{ni}} \times 100$	$\frac{\sum q_{ni}p_{ni}}{\sum q_{oi}p_{ni}} \times 100$
5.	Fisher-এর সূত্র	$\sqrt{\frac{\sum p_{ni}q_{oi}}{\sum p_{oi}q_{oi}} \times \frac{\sum p_{ni}q_{ni}}{\sum p_{oi}q_{ni}}} \times 100$	$\sqrt{\frac{\sum q_{ni}p_{oi}}{\sum q_{oi}p_{oi}} \times \frac{\sum q_{ni}p_{ni}}{\sum q_{oi}p_{ni}}} \times 100$
6.	Marshall Edgeworth -এর সূত্র	$\frac{\sum p_{ni}(q_{oi}+q_{ni})}{\sum p_{oi}(q_{oi}+q_{ni})} \times 100$	$\frac{\sum q_{ni}(p_{oi}+p_{ni})}{\sum q_{oi}(p_{oi}+p_{ni})} \times 100$
7.	আপেক্ষিক সমূহের সরল যৌগিক গড় সূচক সংখ্যা	$\frac{1}{k}\sum \frac{p_{ni}}{p_{oi}} \times 100$	$\frac{1}{k}\sum \frac{q_{ni}}{q_{oi}} \times 100$
8.	আপেক্ষিক সমূহের ভারযুক্ত যৌগিকগড় সূচক সংখ্যা	$\frac{\sum \frac{p_{ni}}{p_{oi}} w_i}{\sum w_i} \times 100$	$\frac{\sum \frac{q_{ni}}{q_{oi}} w_i}{\sum w_i} \times 100$

উদাহরণ ৭. নীচের তথ্য থেকে (i) Laspeyres (ii) Paasche (iii) Marshall-Edgeworth এবং (iv) Fisher-এর সূত্র ব্যবহার করে পরিমাণ সূচক সংখ্যা নির্ণয় করুন :

সামগ্রী	একক পরিমাণের দর		পরিমাণ (উপযুক্ত এককে)	
	ভিত্তি বৎসর	বর্তমান বৎসর	ভিত্তি বৎসর	বর্তমান বৎসর
A	4	12	60	50
B	3	10	20	12
C	2	6	10	6

[C.U.(H) 1992]

সমাধান :

মনে করি, ভিত্তি বৎসর ও বর্তমান বৎসরে দর যথাক্রমে p_o ও p_n এবং পরিমাণ যথাক্রমে q_o ও q_n.

পরিমাণ সূচক সংখ্যা গণনাকার্য

সামগ্রী	q_o	q_n	p_o	p_n	q_op_o	q_op_n	q_np_o	q_np_n
A	60	50	4	12	240	720	200	600
B	20	12	3	10	60	200	36	120
C	10	6	2	6	20	60	12	36
মোট	—	—	—	—	320	980	248	756

(i) Laspeyres-এর পরিমাণ সূচক সংখ্যা $= \dfrac{\sum q_{ni}p_{oi}}{\sum q_{oi}p_{oi}} \times 100 = \dfrac{248}{320} \times 100 = 77{\cdot}5$

(ii) Passche-এর পরিমাণ সূচক সংখ্যা $= \dfrac{\sum q_{ni}p_{ni}}{\sum q_{oi}p_{ni}} \times 100 = \dfrac{756}{980} \times 100 = 77{\cdot}14$

(iii) Marshall-Edgeworth-এর পরিমাণ সূচক সংখ্যা

$$= \frac{\sum q_{ni}(p_{oi}+p_{ni})}{\sum q_{oi}(p_{oi}+p_{ni})} \times 100$$

$$= \frac{\sum q_{ni}p_{oi} + \sum q_{ni}p_{ni}}{\sum q_{oi}p_{oi} + \sum q_{oi}p_{ni}} \times 100$$

$$= \frac{248+756}{320+980} \times 100$$

$$= \frac{1004}{1300} \times 100 = 77{\cdot}23$$

(iv) Fisher-এর আদর্শ পরিমাণ সূচক সংখ্যা

$$= \sqrt{\frac{\sum q_{ni}p_{oi}}{\sum q_{oi}p_{oi}} \times \frac{\sum q_{ni}p_{ni}}{\sum q_{oi}p_{ni}}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{248}{320} \times \frac{756}{980}} \times 100$$

$$= \sqrt{0{\cdot}775 \times 0{\cdot}77} \times 100$$

$$= 0{\cdot}77 \times 100 = 77$$

7.6 সূচক সংখ্যার সীমাবদ্ধতা (Limitations of Index Number)

সূচক সংখ্যার নিম্নলিখিত সীমাবদ্ধতাগুলি রয়েছে :

(i) সূচক সংখ্যা সাধারণত নমুনার ওপর নির্ভর করে নির্ণয় করা হয়। বিভিন্ন পণ্য ও তাদের পরিমাণ নমুনা চয়নের ওপর ভিত্তি করে সংগ্রহ করা হয় এবং নমুনা চয়ন যেহেতু পক্ষপাতহীন হয় না, তাই তথ্য ভ্রমযুক্ত হয়। কেবলমাত্র ভ্রম কমানোর চেষ্টা করা হয়।

(ii) যেহেতু সময়ের সঙ্গে সঙ্গে মানুষের অভ্যাস ও রুচি পরিবর্তন হয়, তাই সব সময় পণ্যের গুণমান পরিবর্তনের ঝুঁকি থাকে। নতুন পণ্যের অন্তর্ভুক্তি ও পুরাতন পণ্যের বহিষ্কার করা প্রয়োজন হয়। তাই দীর্ঘ সময়ের ব্যবধানে তুলামূলক আলোচনা তেমন নির্ভরযোগ্য হয় না।

(iii) একই রাশিতথ্যের উপর বিভিন্ন পদ্ধতি প্রয়োগ করলে সূচক সংখ্যার মান বিভিন্ন হয়।

(iv) উদ্দেশ্য সাধনের জন্য সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে ইচ্ছাকৃত পক্ষপাত দেখানো যায়। ভিত্তিকালের লাভকে অস্বাভাবিক বেশি নিয়ে চলতিকালের লাভকে কম দেখানো যায়। আবার ভিত্তিকালের দর অস্বাভাবিক কম নিয়ে চলতি কালের দরকে বেশি দেখানো যায়।

তথ্য সংগ্রহের উৎস সবসময় নির্ভরযোগ্য নাও হতে পারে, কারণ সব অনুসন্ধানকারীর গুণমান, সততা ও বুদ্ধিমত্তা কখনই সমান নয়। যদি স্বাভাবিক ভিত্তিকাল পাওয়া না যায়, তাও সূচক সংখ্যা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে একটি বড় সীমাবদ্ধতা।

7.7 অনুশীলনী

সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন :

(১) ল্যাসপেয়ার্সের দর সূচককে আপেক্ষিক দরের ভারযুক্ত যৌগিক গড় হিসাবে লিখলে ভারগুলি কী হবে?

(২) ল্যাসপেয়ার্স, পাশ ও মার্শাল-এজওয়ার্থ-এর সূত্রে কী ভার হিসাবে ব্যবহৃত হয়?

(৩) বাওলের ও ফিসারের সূত্র নির্ণয়ে ল্যাসপেয়ার্স ও পাশের সূচক সংখ্যার কোন্ কোন্ গড় ব্যবহৃত হয়?

(৪) কোন সূত্রকে আদর্শ সূচক সংখ্যা বলা হয়?

(৫) জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচকের ভার কোন্ পদ্ধতিতে নির্ধারিত হয়?

(৬) জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচকের দুটি ব্যবহারিক প্রয়োগ উল্লেখ করুন।

রচনাত্মক প্রশ্ন :

(১) সূচক সংখ্যা বলতে কী বোঝেন?

(২) সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে যে সকল সমস্যার সন্মুখীন হতে হয় তা আলোচনা করুন।

(৩) সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে বিভিন্ন সূত্র বর্ণনা করুন।

(৪) জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যা বলতে কী বোঝ? ইহা কীভাবে নির্ণয় করা হয়? ইহার ব্যবহার সম্বন্ধে আলোচনা করুন।

(৫) টাকার ক্রয় ক্ষমতা ও প্রকৃত বেতন নির্ণয়ে জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক সংখ্যার ব্যবহার আলোচনা করুন।

(৬) নিম্নে প্রদত্ত তথ্য থেকে উপযুক্ত পদ্ধতিতে দর সূচক সংখ্যা নির্ণয় করুন।

পণ্য (Commodity)	**ভিত্তিকালের দর** (Base Price)	**চলতিকালের দর** (Current Price)
A	39	58
B	49	69
C	23	37
D	29	44
E	31	47

(৭) নিম্নলিখিত তথ্য থেকে বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে সূচক সংখ্যা নির্ণয় করুন।

পণ্য	**ভিত্তিকাল**		**চলতিকাল**	
	দর	পরিমাণ	দর	পরিমাণ
চাল	2	8	4	6
ডাল	5	10	6	5
মাছ	4	14	5	10
তেল	2	19	2	13

(৮) একটি শিল্পপ্রধান শহরের শ্রমিকদের সম্বন্ধে নিম্নলিখিত তথ্য দেওয়া আছে।

পণ্য	**জীবিকা নির্বাহন ব্যয় সূচক 1990 সালে (1980 = 100)**	**আনুপাতিক ব্যয় (%)**
খাদ্য	225	52
বস্ত্র	175	8
জ্বালানী	155	10
বাসস্থান	250	14
বিবিধ	150	16

1980 সালে মাসিক গড় বেতন ছিল 600 টাকা। ঐ শহরে শ্রমিকদের মাথাপিছু মাসিক গড় বেতন 1990 সালে কত টাকা হলে তাদের জীবনযাত্রার মান 1980 সালের জীবনযাত্রার মানের সমান হবে?

(৯) বিভিন্ন বছরের গড় মাসিক বেতন নিম্নপূপ :

বছর :	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
বেতন (টাকায়) :	1000	1040	1150	1160	1160	1180	2000
সূচক :	100	150	200	220	230	250	250

বিভিন্ন বছরে প্রকৃত বেতনগুলি ও 1993 সালে টাকার ক্রয় ক্ষমতা নির্ণয় করুন।

(১০) নীচের তথ্য থেকে Fisher-এর আদর্শ সূত্র প্রয়োগ করে 1982 সালকে ভিত্তি বৎসর ধরে 1984 সালে দর-সূচক সংখ্যা ও পরিমাণ সূচক সংখ্যা নির্ণয় করুন।

বৎসর	**সামগ্রী-A**		**সামগ্রী-B**		**সামগ্রী-C**	
	দর (টাকায়)	**পরিমাণ (কেজিতে)**	**দর (টাকায়)**	**পরিমাণ (কেজিতে)**	**দর (টাকায়)**	**পরিমাণ (কেজিতে)**
1982	5	10	8	6	6	3
1984	4	12	7	7	5	4

[C.A. (Intermediate), 1985]

(১১) নীচের তথ্য থেকে (i) সমষ্টিগত পদ্ধতি এবং (ii) আপেক্ষিক পদ্ধতি (যৌগিক গড়)-এর সাহায্যে পরিমাণ সূচক সংখ্যা নির্ণয় করুন।

সামগ্রী	**ভিত্তি বৎসরে পরিমাণ**	**বর্তমান বৎসরে পরিমাণ**
A	8	12
B	12	15
C	20	28

(১২) নীচের তথ্য থেকে Fisher-এর পরিমাণ সূচক সংখ্যা নির্ণয় করুন

	2005		**2010**	
সামগ্রী *(Commodity)*	**দর *(Price)***	**পরিমাণ *(Quantity)***	**দর *(Price)***	**পরিমাণ *(Quantity)***
X	5	10	4	12
Y	8	6	7	7
Z	6	3	5	4

একক 8 ❑ কালীন সারি বিশ্লেষণ (Time Series Analysis)

গঠন

8.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করার পর আপনি বুঝতে পারবেন—

- কালীন সারির বিশ্লেষণের পদ্ধতিগুলি কী
- কালীন সারি বিশ্লেষণের উপযোগিতা কী
- কালীন সারির বিভিন্ন অংশগুলি কী কী
- প্রবণতা নির্ধারণের পদ্ধতিগুলি কী
- ঋতুজ সূচক নির্ধারণের পদ্ধতিগুলি কী কী
- ঋতুজ ভেদ কীভাবে দূর করা যায়

8.1 প্রস্তাবনা

বর্তমান অধ্যায়ে রাশিবিজ্ঞান সম্মত বিশ্লেষণের একটি বিশেষ পদ্ধতিকে বাস্তবক্ষেত্রে প্রয়োগের উদাহরণের মাধ্যমে আলোচনা করা হয়েছে। ধারাবাহিকভাবে সময়ের সাথে সম্পর্কযুক্ত রাশিতথ্যকে কালীন সারি (Time Series) বলা হয়। যে যে সময়ে এই তথ্যগুলি দেওয়া হয়, সাধারণত সেগুলি সম-অন্তরযুক্ত হয়। অর্থাৎ কালীন সারির তথ্য বাৎসরিক, ত্রৈমাসিক, সাপ্তাহিত, দৈনিক, প্রতি ঘন্টায় ইত্যাদি হতে পারে। কালীন সারির ক্ষেত্রে যে

দুটি চলকের ব্যবহার একসঙ্গে করা হয়, সবসময় তাদের মধ্যে একটি হল সময় ও অপরটি অন্য যে কোনও চলক। যেমন, তাপমাত্রা, কোনও দ্রব্যের উৎপাদন, চাহিদা, যোগান, বিক্রয়, জনসংখ্যা, মূল্যসূচক, শ্রমিকের বেতন, আয়, ব্যয় ইত্যাদি। অর্থাৎ এক্ষেত্রে কোন চলক (y) সমসময় সময় (t)-এর অপেক্ষক। এই বৈশিষ্ট্যের জন্য কালীন সারির মধ্যে কেবলমাত্র y-এর প্রকৃতিই বিশ্লেষণ করা হয়। কারণ t-এর পরিবর্তনের ধরন আমাদের জানা থাকে। প্রায় সবক্ষেত্রেই এটি অতীত থেকে বর্তমান হয়ে ভবিষ্যতের দিকে চলে। লেখচিত্রে কালীন সারির সময়কে অনুভূমিক অক্ষে নেওয়া হয়। t বিভিন্ন সময়ে বিন্দু হতে পারে। যদি কালীন সারি বিভিন্ন সময় শ্রেণী (time period) হয়, তাহলে t ঐ সময়ে শ্রেণীর মধ্যবিন্দু।

8.2 কালীন সারি বিশ্লেষণের উপযোগিতা

অর্থনীতি এবং ব্যবসা-বাণিজ্যের সাথে সম্পর্কযুক্ত তথ্যের একটি বড় অংশ কালীন সারির অন্তর্গত। সুতরাং অর্থনীতির যথাযথ রূপরেখা পেতে হলে কিংবা ব্যবসা-বাণিজ্যে সফল হতে হলে কালীন সারির বিশ্লেষণ অপরিহার্য। কালীন সারির অন্তর্গত কোনও চলকের মান সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয় এবং এই পরিবর্তন শীলতা নানা কারণে পারস্পরিক সম্পর্কের ফল। কানীল সারির যথাযথ বিশ্লেষণের ফলে এই কারণগুলি আলাদা করা যায় এবং চলকের মান পরিবর্তনের ক্ষেত্রে কারণগুলির প্রভাব সম্পর্কে মূল্যায়ন করা যায়। এরকম বিশ্লেষণের ওপর নির্ভর করে ব্যবসায়-পরিচালক মণ্ডলীর পক্ষে ব্যবসায়ের ভবিষ্যৎ রূপরেখা তৈরি করা সহজ হয়। কালীন সারির বিশ্লেষণের মাধ্যমে তথ্যের অতীত আচরণ সম্বন্ধে মূল্যায়ন করা যায়। অতীতে কোনও চলকের মানের পরিবর্তন কী পরিমাণে হয়েছিল এবং এই পরিবর্তনে কোন্ কোন্ বিষয় কার্যকরী ছিল কালীন সারির বিশ্লেষণ থেকে তা বোঝা যায়। অতীতের ওপর নির্ভর করে চলকের ভবিষ্যৎ মানের প্রবণতা বা পরিমাণ বোঝা যায়। কোনও ব্যবসায়ীকে কোনও একটি সামগ্রীর উৎপাদন এমনভাবে করতে হবে যাতে এর পরিমাণ চাহিদার তুলনায় কম না হয় এবং অবিক্রীত সামগ্রী বেশি পরিমাণে না থাকে। সুতরাং, তার ব্যবসার সাফল্য অনেকাংশে অনুমানের ওপর নির্ভর করে। যদি পরিসংখ্যান পদ্ধতির সঠিক প্রয়োগে কালীন সারির যথাযথ বিশ্লেষণ করা যায়, তবে ব্যবসায়ের ভবিষ্যৎ প্রবণতা সম্পর্কে যথোপযুক্ত অনুমান করা যায়। এবং তার ওপর নির্ভর করে প্রয়োজনীয় ভবিষ্যৎ পরিকল্পনা তৈরি করা যায়। অনেক সময় দুই বা ততোধিক কালীন সারির মধ্যে তুলনা করে গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়।

8.3 কালীন সারির বিভিন্ন অংশ

যে কোনও কালীন সারির ক্ষেত্রে চারটি অংশ (Component) দেখা যায়। এগুলি হল দীর্ঘকালীন প্রবণতা [Secular Trend (T)], ঋতুজ ভেদ [Seasonal Variation (S)], চক্রীল ভেদ [Cyclical Variation (C)], এবং অনিয়মিত ভেদ [Irregular Variation (I)], কালীন সারির চলকের মানকে এই চারটি অংশের মোট যোগফল বা গুণফল হিসাবে ধরা হয়।

যৌগিক কাঠামো (Additive Model)-এ কালীন সারির ক্ষেত্রে,

$Y_t = T_t + S_t + C_t + I_t$

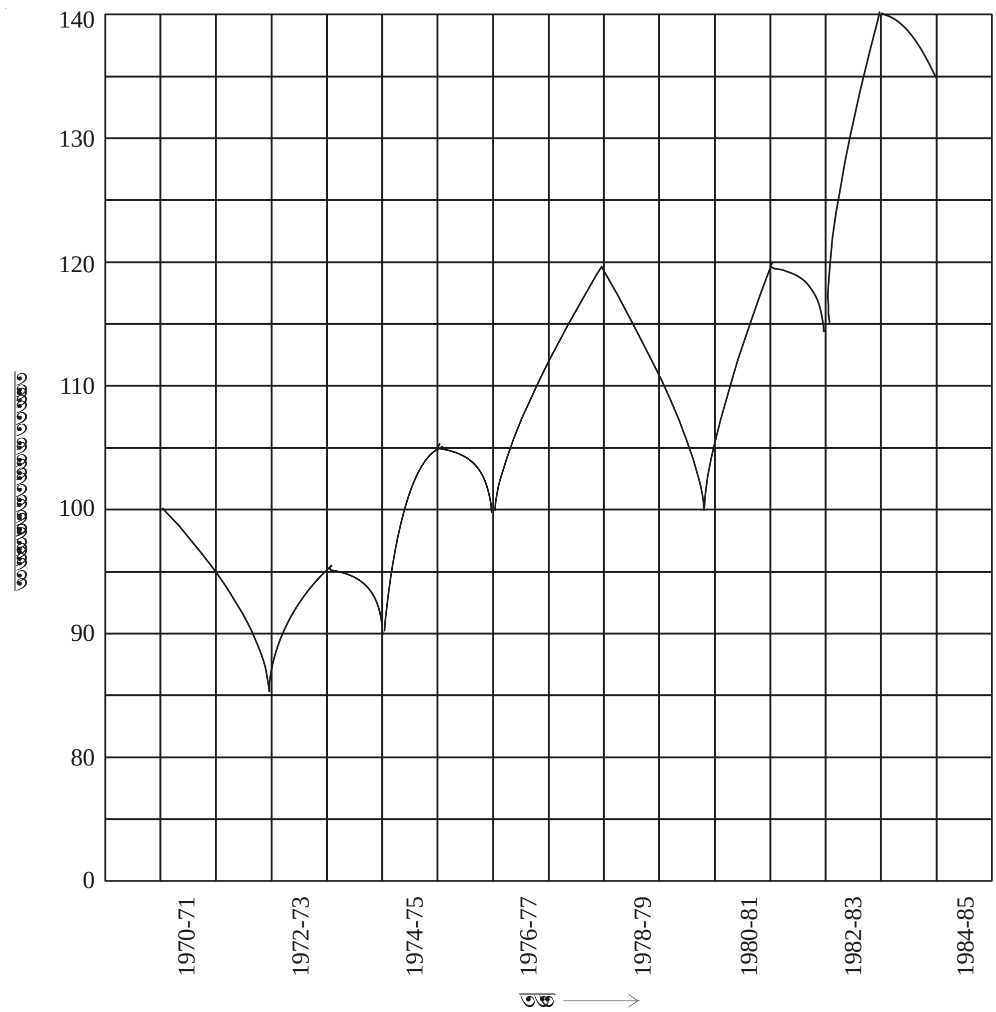
এবং গুণসূচক কাঠামো (Multiplicative Model)-এ কালীন সারির ক্ষেত্রে,

$Y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$

সাধারণত গুণসূচক কাঠামোই কালীন সারিতে বেশি ব্যবহার করা হয়। কারণ হিসাবে দেখা যায় যে, S.C.I প্রভৃতি অংশগুলি T-এর অনুপাতে মোটামুটি স্থির থাকে। তাছাড়া বিভিন্ন অংশ যখন অন্যদের অনুপাতে প্রকাশ করা হয়, তখন এগুলির অর্থ আরও বেশি পরিষ্কার হয়। সমস্ত কালীন সারিতেই এই চারটি অংশ সমান ভাবে বিদ্যমান থাকে না। কোনও একটি বা একাধিক অংশ অন্যগুলির থেকে বেশি প্রকট হতে পারে। বিভিন্ন কারণে কালীন সারির অংশগুলির পৃথকীকরণের প্রয়োজন হয়। কোনও দোকানের মালিক তার বিক্রয়ের ঋতুজ ভেদ জানতে ইচ্ছুক হতে পারেন। চক্রীল ভেদের পরিমাণ আগে জানা থাকলে, ভবিষ্যতে অর্থনৈতিক গতি সম্পর্কে পূর্বাভাষ দেওয়া বা সেই বিষয়ে কোনও নীতি গ্রহণ করা সম্ভব হয়। অনেক সময় অনিয়মিত ভেদের জন্য অর্থাৎ দুর্ভিক্ষ বা মহামারীর সময় দ্রব্যমূল্যের সূচক অস্বাভাবিকভাগে বৃদ্ধি পেতে পারে।

(ক) প্রবণতা : অভিজ্ঞতা থেকে দেখা যায় যে, সাধারণত দীর্ঘকালীন প্রবণতাই কালীন সারির সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ অংশ। যদি কোনও কালীন সারি দীর্ঘদিন ধরে বিশ্লেষণ করা যায়, তা হলে দেখা যাবে যে, চলকের মানগুলির পরিমাণ হয় ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পাচ্ছে নয়তো হ্রাস পাচ্ছে বা স্থির আছে। এই প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্যকেই প্রবণতা বলা যায় ও এটি পরিমাপযোগ্য। যদি আমরা প্রবণতা নির্ণয় করতে পারি, তবে কালীন সারির প্রতি সময়ের মান থেকে অনুমিত প্রবণতার মান বাদ দিয়ে অন্যান্য অংশের জন্য যে বিভিন্নতা আছে তা নির্ণয় করতে পারি। প্রবণতার প্রকৃতি ঋজুরৈখিক (Linear) কিংবা বক্ররৈখিক (Curvilinear) হতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, বেশিরভাগ সামগ্রীর দরে ঊর্ধ্বমুখী প্রবণতা দেখা যায়।

(খ) ঋতুজ ভেদ : কোনও কালীন সারির চলকের পর্যায়ক্রমিক স্বল্পমেয়াদী পরিবর্তন ঋতুজ ভেদের প্রভাবে হয়। ঋতুজ ভেদের পর্যায়কাল কখনো একবছরের বেশি হয় না। চলকের পর্যায়ক্রমিক পরিবর্তনের বৈশিষ্ট্যকে ঋতুজ ভেদ বলে। সাধারণ মাসিক বা ত্রৈমাসিক ঋতুজ ভেদ নিয়ে আমরা বেশি আগ্রহী হলেও সাপ্তাহিক, এমনকি দৈনিক ঋতুজ ভেদও দেখা যায়। মানুষের রুচি, অভ্যাস, ধর্মীয় ঐতিহ্য ইত্যাদি এবং প্রাকৃতিক পরিবেশ ও আবহাওয়ার প্রভাবের জন্যই কালীন সারিতে ঋতুজ পরিবর্তন হয়ে থাকে। ব্যবসায়ীদের ক্ষেত্রে স্বল্পকালীন পূর্বাভাষ পাওয়ার জন্য ঋতুজ সূচক (Seasonal Index) বিশেষ সাহায্যকারী। উদাহরণস্বরূপ, পোশাক বিক্রেতাদের যদি পূজার সময় পোশাক বিক্রীর ঋতুজ সূচক জানা থাকে, তবে তাদের পক্ষে ঐ সময়ের চাহিদা মেটানোর জন্য আগে থেকে প্রয়োজনীয় মজুত করে রাখতে সুবিধা হয়। অনুরূপ, গ্রীষ্মকালে বৈদ্যুতিক পাখা ও ঠাণ্ডা পানীয়ের চাহিদা মেটানো যায়।



1970-71 সাল থেকে 1984-85 সাল পর্যন্ত ভারতে মোট খাদ্যশস্যের উৎপাদন

(গ) চক্রীল ভেদ : কালীন সারিতে ঋতুজ ভেদের মতই আরও একটি বৈশিষ্ট্য দেখা যায়। এটিকে বলা হয় চক্রীল ভেদ (Cyclical Variation)। তবে এই ভেদটি দীর্ঘকালীন এবং প্রতিটি চক্রের দৈর্ঘ্য এক বছরের বেশি হয়। তবে, ঋতুজ ভেদের মতো এর পরিবর্তনের পর্যায়কাল (Period) ও ভেদত্ব (amplitude) ততখানি নিয়মিত নয়। আয়, উৎপাদন, বেতন, বিনিয়োগ, সূচক দর, নিয়োগ প্রভৃতি ক্ষেত্রে ব্যবসায়িক চক্রের (business cycle) প্রভাবে দীর্ঘকালীন ওঠানামা দেখা যায়। এক-একটি ওঠা ও নামা নিয়ে একটি চক্র বা পর্যায়কাল সম্পূর্ণ হয়। চক্রীল ভেদ নিয়ে সময়ের গতির সঙ্গে সঙ্গে ব্যবসায়িক চক্রের পর্যায়কালের ধাপগুলি অর্থাৎ উন্নতি (Prosperity), পশ্চাদ্‌গতি (Decline), মন্দা (Depressions) এবং পুনরোন্নয়ন (Recovery) বিভিন্ন ভেদে প্রতিফলিত হয়। দুটি

ব্যবসায়িক চক্রের পর্যায়কাল পরস্পর সমান নাও হতে পারে। এই কারণে চক্রীলভেদ নির্ধারণের পদ্ধতিগুলি বেশ কষ্টকর।

যে কোনও ব্যবসায়ের গতি-প্রকৃতি সঠিকভাবে জানার জন্য চক্রীল ভেদের ধারণা খুব উপযোগী। কারণ, ব্যবসায়ের গতি-প্রকৃতি সঠিকভাবে জানা সম্ভব হলে প্রয়োজনীয় নীতি ও পরিকল্পনা নির্ধারণ করে ব্যবসায়ে সুস্থিরতা আনা যায়।

(ঘ) অনিয়মিত ভেদ : বহুবিধ কারণে কালীন সারিতে ভেদের অস্তিত্ব অনুভব করা যায়। যুদ্ধ, ভূমিকম্প, মহামারী, বন্যা, ধর্মঘট, রাজনৈতিক পটপরিবর্তন বা সামাজিক পরব বা উৎসব ইত্যাদি কারণে কালীন সারিতে আকস্মিকভাবে প্রচণ্ড পরিবর্তন দেখা দিতে পারে। এরকম ঘটনার কোনও পূর্বাভাস দেওয়া সম্ভব নয় বলে কালীন সারিতে এই অংশটি সম্পূর্ণ অনিয়মিতভাবে বিদ্যমান থাকে। সাধারণভাবে কালীন সারির যে পরিবর্তন প্রবণতা, ঋতুজ ভেদ অথবা চক্রীল ভেদ দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায় না, তাই অনিয়মিত ভেদ (Irregular Variation)।

8.4 প্রবণতা নির্ধারণ পদ্ধতিসমূহ

প্রবণতা নির্ধারণের জন্য নিম্নলিখিত বিভিন্ন পদ্ধতির প্রয়োগ করা হয় :

(ক) মুক্ত-হস্ত পদ্ধতি (Free hand method)

(খ) অর্ধ-গড় পদ্ধতি (Semi-average method)

(গ) চলমান গড় পদ্ধতি (Moving average method)

(ঘ) লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি (Least square method)

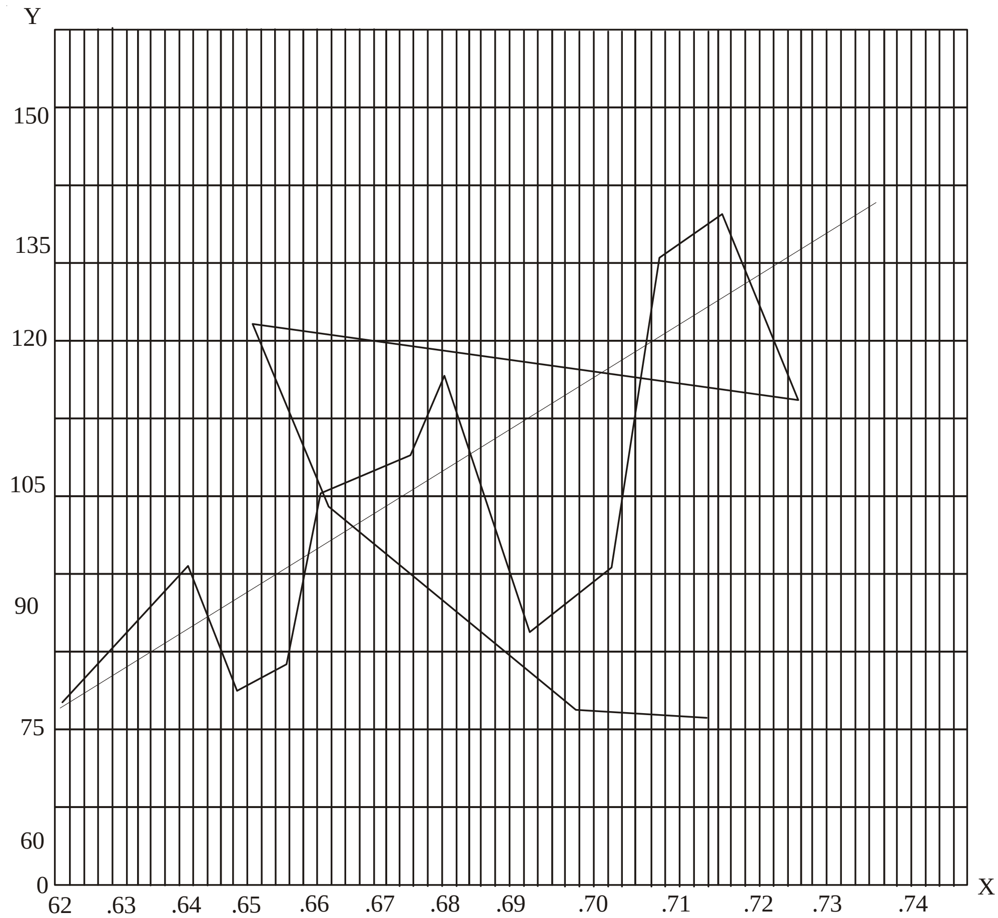
(ক) মুক্ত-হস্ত পদ্ধতি :

যদি কালীন সারির তথ্যগুলি লেখচিত্রের দ্বারা পরিবেশন করা হয়, তবে পর্যবেক্ষণের সাহায্যে লেখচিত্রে অঙ্কিত বিন্দুগুলির মধ্য দিয়ে এমনভাবে একটি মসৃণ রেখা টানা যেতে পারে যাতে প্রকৃত বিন্দুগুলি এই প্রবণতা রেখার যতটা সম্ভব নিকটে থাকে। এই মসৃণ রেখা টানার পদ্ধতিকে মুক্ত-হস্ত পদ্ধতি বলে। কিন্তু যেহেতু এই পদ্ধতিটি ব্যক্তি-সাপেক্ষ (Subjective), তাই এখানে প্রবণতা রেখা পর্যবেক্ষণকারীর ঝোঁকের বা পক্ষপাতের (bias) ওপর অনেকটা নির্ভরশীল। সেজন্য যেখানে নির্ভুলভাবে প্রবণতা রেখা নির্ধারণ করা প্রয়োজন, সেখানে এই পদ্ধতি ব্যবহার করা চলে না। তবে এই পদ্ধতিতে প্রবণতা সম্পর্কে একটা প্রাথমিক ধারণা পাওয়া যায়।

উদাহরণ ১. লেখচিত্রের সাহায্যে প্রবণতার মানগুলি নির্ণয় কর :

বছর :	’62	’63	’64	’65	’66	’67	’68	’69	’70	’71	’72	’73	’74
মান :	64	82	97	71	78	112	115	132	80	100	146	150	120

সমাধান :



মুক্ত-হস্ত পদ্ধতিতে প্রবণতা

লেখচিত্র বা মুক্তহস্ত পদ্ধতিতে প্রদত্ত কালীন সারির প্রবণতা রেখা চিত্রে দেখানো হয়েছে। x-অক্ষরেখা থেকে প্রবণতা রেখার দুরত্ব y-অক্ষরেখার সমান্তরাল দিক বরাবর মেপে বিভিন্ন বছরের প্রবণতা মানগুলি দেওয়া হল। প্রদত্ত কালীন সারিতে স্বল্পমেয়াদী সময়ের ওঠানামা থাকলেও দীর্ঘমেয়াদী সময়ের তথ্যের বৃদ্ধির প্রবণতা আছে।

বছর :	’62	’63	’64	’65	’66	’67	’68	’69	’70	’71	’72	’73	’74
প্রবণতার মান :	66	72	78	84	90	96	102	105	114	120	126	132	138

(খ) অর্ধ-গড় পদ্ধতি :

এই পদ্ধতিতে কালীন সারির রাশিতথ্য প্রথম অর্ধ ও দ্বিতীয় অর্ধ এই হিসাবে দুটি সমান ভাগে ভাগ করা হয়। জোড় সংখ্যক তথ্যের কালীন সারির ক্ষেত্রে দুটি সমান ভাগে ভাগ করতে অসুবিধা হয় না। বিজোড় সংখ্যক তথ্যের

ক্ষেত্রে মধ্যম তথ্যটিকে বাদ দিয়ে দুটি সমান ভাগে ভাগ করতে হয়, অথবা মধ্যম তথ্যকে দুটি ভাগের মধ্যে অন্তর্গত করেও সমান ভাগে ভাগ করা যায়।

এরপর প্রত্যেক অর্ধের অন্তর্গত তথ্যসমূহের মানের যৌগিক গড় নির্ণয় করতে হয়। এইভাবে প্রাপ্ত গড় দুটির প্রথমটি প্রথম অর্ধের সময়সীমার মধ্যবিন্দুতে এবং দ্বিতীয়টি দ্বিতীয় অর্ধের সময়সীমার মধ্যবিন্দুতে লেখচিত্রে স্থাপন করতে হয়। এই দুটি বিন্দুর সংযোগ সরলরেখাই প্রদত্ত তথ্যের অর্ধ-গড় পদ্ধতিতে প্রবণতা রেখাকে নির্দেশ করে। x-অক্ষরেখা (ভুজ) থেকে প্রবণতা রেখার দূরত্ব দ্বারা বিভিন্ন সময়ে প্রবণতার পরিমাপ করা যায়। এই পদ্ধতির ত্রুটি এই যে, যদি কালীন সারির তথ্য সরলরৈখিক না হয় তবে এই পদ্ধতির দ্বারা প্রবণতা সঠিক পরিমাপ সম্ভব নয়।

উদাহরণ ২. নিম্নে প্রদত্ত রাশিতথ্যের অর্ধ-গড় পদ্ধতিতে প্রবণতা সরলরেখা নির্ণয় কর ঃ

বছর :	’88	’89	’90	’91	’92	’93	’94	’95	’96	’97	’98
রপ্তানি :	20·5	21·8	20·7	23·0	24.0	22·8	25·0	24·5	26·0	24·0	25·0

(কোটি টাকায়)

সমাধান : প্রদত্ত তথ্যে 11 বছরের রপ্তানি দেওয়া আছে। সুতরাং, অর্ধ-গড় পদ্ধতিতে প্রবণতার পরিমাপ নির্ণয়ের জন্য মধ্যম তথ্য অর্থাৎ 1993 সালকে বাদ দিয়ে 1988 থেকে 1992 সাল পর্যন্ত এই 5 বছরকে প্রথম অর্ধ এবং 1994 থেকে 1998 সাল পর্যন্ত এই 5 বছরকে দ্বিতীয় অর্ধে ভাগ করা হলে,

$$\overline{y}_t = \frac{20{\cdot}5 + 21{\cdot}8 + 20{\cdot}7 + 23{\cdot}0 + 24{\cdot}0}{5} = 22 \text{ কোটি টাকা}$$

এবং $$\overline{y}_2 = \frac{25{\cdot}0 + 24{\cdot}5 + 26{\cdot}0 + 24{\cdot}0 + 25{\cdot}0}{5} = 24{\cdot}9 \text{ কোটি টাকা}$$

এখন লেখচিত্রে প্রথম অর্ধের সময়সীমার মধ্যবিন্দুতে অর্থাৎ 1990 সালে রপ্তানি মান 22 কোটি টাকা এবং দ্বিতীয় অর্ধের সময়সীমার মধ্য বিন্দুতে অর্থাৎ 1996 সালে রপ্তানির মান 24·9 কোটি টাকা চিহ্নিত করে দুটি বিন্দুর সংযোগকারী সরলরেখা দ্বারা প্রবণতার মান নির্ণয় করা যাবে।

(গ) চলমান গড় পদ্ধতি :

কালীন সারির লৈখিক রূপায়ণের পর বিন্দুগুলি যদি পর্যায়ক্রমে সরলরেখা দিয়ে যোগ করা যায় তবে সাধারণত একটি আঁকাবাঁকা সরলরেখা গোষ্ঠী পাওয়া যায়। এই আঁকাবাঁকা রেখা গোষ্ঠীর ওঠানামা দূর করে প্রবণতা অংশটিকে আলাদা করার পদ্ধতিকে চলমান গড় পদ্ধতি বলে। অবশ্য এই পদ্ধতিতে সাধারণত যে প্রবণতা পাওয়া যায়, তার লৈখিক আকৃতিও একই প্রকার। এই পদ্ধতিতে নির্দিষ্ট প্রথম কয়েকটি মানের গড় নির্ণয় করা হয় ও সেই গড়কে ঐ মানগুলির ঠিক মধ্যস্থানে রাখা হয়। যদি প্রথমে নির্দিষ্ট মানগুলির সংখ্যা বিজোড় হয়, তবে ঐ গড়কে সহজেই মধ্যমানটির সম্পর্কিত স্থানে বসানো চলে। এর পর কালীন সারির প্রথম মানটিকে বাদ দিয়ে দ্বিতীয় থেকে পরবর্তী ঐ নির্দিষ্ট সংখ্যক মানের গড় নির্ণয় করা হয় ও আগের মতই ঐ মানগুলির মধ্যস্থানে বসানো হয়। এইভাবে এই

পদ্ধতি ক্রমান্বয়ে প্রয়োগ করা হয়। সাধারণত তিন, পাঁচ বা সাতটি মানের একসঙ্গে চলমান গড় নির্ণয় করা হয়। চলমান গড়ের ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট সংখ্যক মানের সংখ্যা যদি জোড় হয়, তবে পরপর গড়গুলি মধ্যবর্তী দুটি পদের মাঝখানে বসানো হয়। কিন্তু কালীন সারির কোনও একটি নির্দিষ্ট সময়ের (t) পরিপ্রেক্ষিতে গড়কে বসানোর প্রয়োজন থাকায় সাধারণত আবার দুটি মানের চলমান গড় হিসাব করা হয়। অবশ্য চলমান গড়ের ক্ষেত্রে প্রথমে নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা কত হবে তা তথ্যের প্রকৃতি ও পর্যবেক্ষণের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। যদি ঐ পদের সংখ্যা তথ্যের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত কোনও চক্রীল ভেদের চক্র-দৈর্ঘ্যের সমান কিংবা তার গুণিতক হয়, তবে চলমান গড়ের দ্বারা কালীন সারির তথ্যের ওঠানামা সবচেয়ে ভালোভাবে দূর করা যায়। এই পদ্ধতিটি কেবল প্রবণতার পরিমাপই নয়, কালীন সারির অন্যান্য অংশগুলি যথা, ঋতুজ ভেদ, চক্রীল ভেদ ও অনিয়মিত ভেদের বিশ্লেষণেও প্রয়োগ করা হয়। এই পদ্ধতির অসুবিধা এই যে, প্রদত্ত কালীন সারির প্রত্যেক সময়ের জন্য প্রবণতা মান নির্ণয় করা যায় না। প্রথম ও শেষ দিকের প্রবণতার কয়েকটি মান অনির্ণীত থাকে। চলমান গড়গুলি পরিবর্তনশীলতার কোনও সূত্র মেনে চলে না, সেজন্য পদ্ধতিটির প্রয়োগে ভবিষ্যতবাণী করা যায় না।

উদাহরণ ৩. নিম্নে প্রদত্ত উৎপাদনের রাশিতথ্য থেকে পাঁচটি পদের চলমান গড় নির্ণয় করে প্রবণতার মান প্রদর্শন করুন।

বছর :	1988	’89	’90	’91	’92	’93	’94	’95	’96	’97	’98	’99
উৎপাদন : (হাজার)	42	44	57	45	49	53	65	55	47	51	62	50

সমাধান : নিম্নলিখিত সারণিতে চলমান গড়ের মান দেওয়া হল :

বছর	**উৎপাদন (হাজার)**	**পাঁচটি মানের চলমান যোগফল (S)**	**প্রবণতার মান = চলমান গড় = S/5**
1988	42	–	–
89	44	–	–
90	57	237	47·4
91	45	248	49·6
92	49	269	53·8
93	53	267	53·4
94	65	269	53·8
95	55	271	54·2
96	47	280	56·0
97	51	265	53·0
98	62	–	–
99	50	–	–

উদাহরণ ৪. প্রদত্ত রাশিমালার ক্ষেত্রে একটি 4 বছরের আবর্তকালযুক্ত বাণিজ্য চক্রের অস্তিত্ব জানা আছে, এখানে উপযুক্ত পদবিশিষ্ট চলমান গড় পদ্ধতিতে প্রবণতা মান নির্ণয় করুন।

বছর :	1988	’89	’90	’91	’92	’93	’94	’95	’96	’97	’98
বিক্রয় : (হাজার)	54·0	40·5	47·0	48·5	42·9	42·1	36·6	42·7	45·7	45·1	37·8

সমাধান : প্রশ্নানুসারে চলমান গড় পদ্ধতিতে প্রবণতা মান নির্ণয় করতে হলে আমাদের অবশ্যই চারটি পদ-বিশিষ্ট চলমান গড় নিতে হবে, কারণ সমদৈর্ঘ্যের চক্রীল ভেদ রাশিমালায় বর্তমান।

বছর	**বিক্রয়**		**চারটি পদের চলমান যোগফল**		**পুনরায় দুটি পদের চলমান যোগফল(S)**	**প্রবণতার মান = চলমান গড় = S/(2×4)**
1988	54·0	–	–		–	–
89	40·5	–	–		–	–
		→	190·0			
90	47·0			→	368·9	46·11
		→	178·9			
91	48·5			→	359·4	44·92
		→	180·5			
92	42·9			→	350·6	43·82
		→	170·1			
93	42·1			→	334·4	41·80
		→	164·3			
94	36·6			→	331·4	41·42
		→	167·1			
95	42·7			→	337·2	42·15
		→	170·1			
96	45·7			→	341·4	42·68
		→	171·3			
97	45·1		–		–	–
98	37·8		–		–	–

(ঘ) লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে কালীন সারির চলকের প্রবণতার মানগুলি নির্ণয়ে চলকের মানের পরিবর্তনশীলতার সাথে সময়ের গাণিতিক সম্পর্ক আছে বলে অনুমান করা হয়। গাণিতিক সম্পর্কের আকার সাধারণত প্রদত্ত কালীন ‘সারির তথ্যের উপযোগী করে স্থির করতে হয়। তবে প্রবণতা রেখা নির্ধারণের সর্বশ্রেষ্ঠ

পদ্ধতি হল লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি। সময়ের সাথে প্রবণতার বহুরকমের গাণিতিক সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয়। তবে এখানে সাধারণ তিনটি গাণিতিক সম্পর্কের কথা আলোচনা করা হবে।

(i) যদি সময়ের সাথে কালীন সারির প্রবণতার সরলরৈখিক (linear) সম্পর্ক হয় অর্থাৎ $y_t = a + bt$ সম্পর্কে থাকে, তবে লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে প্রাপ্ত a ও b-এর মান নির্ণয়কারী মৌল সমীকরণ দুটি হল :

$$\sum y_t = na + b\sum t$$

এবং

$$\sum ty_t = a\sum t + b\sum t^2$$

যেখানে y_t, t = 1, 2, ...n হলে n সংখ্যক বিভিন্ন সময়ে কালীন সারির তথ্য।

(ii) যদি সময়ের সাথে প্রবণতার অধিবৃত্তাকার (Parabolic) বা দ্বিঘাত (Quadratic) সম্পর্ক হয় অর্থাৎ,

$$y_t = a + bt + ct^2$$

তবে লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে প্রাপ্ত a, b ও c-এর মান নির্ণয়কারী মৌল সমীকরণ তিনটি হল :

$$\sum y_t = na + b\sum t + c\sum t^2$$

$$\sum ty_t = a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3$$

$$\sum t^2y_t = a\sum t^2 + b\sum t^3 + c\sum t^4$$

(iii) যদি সময়ের সাথে প্রবণতার সূচকাকৃতি (Exponential) সম্পর্ক হয় অর্থাৎ,

$y_t = ab^t$ হয়, সেক্ষেত্রে উভয় পক্ষের লগারিদ্‌ম্ নিয়ে পাই,

$$\log y_t = \log a + t \log b$$

$= A + Bt$, যেখানে $A = \log a$ ও $B = \log b$

সুতরাং, A ও B - এর মান নির্ণয়কারী মৌল সমীকরণ দুটি হল :

$$\sum \log y_t = nA + B\sum t$$

এবং $\sum t \log y_t = A\sum t + B\sum t^2$

এই সমীকরণ দুটি সমাধান করে A ও B-এর মান পাওয়া যাবে এবং তা থেকে a = Antilog (A) এবং b = Antilog (B) পাওয়া যাবে।

উদাহরণ ৫. একটি কারখানায় 1990 সাল থেকে 1996 সাল পর্যন্ত চিনির উৎপাদন দেওয়া আছে। তথ্যের উপযুক্ত সরলরৈখিক প্রবণতা নির্ণয় কর এবং 1997 সালের প্রত্যাশিত উৎপাদন নির্ণয় করুন।

বছর :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
উৎপাদন : (হাজার টন)	76	87	95	81	91	96	90

সমাধান : মনে কর, প্রদত্ত তথ্যের উপযুক্ত সরলরৈখিক প্রবণতা সমীকরণ হল

$y_t = a + bt,$

সুতরাং, লঘিষ্ঠ বর্গনীতিতে a ও b নির্ণয়কারী মৌল সমীকরণ দুটি হল :

$\sum y_t = na + b\sum t$.......(1)

$\sum ty_t = a\sum t + b\sum t^2$....... (2)

বছর (x)	t = x – 1993	উৎপাদন (y_t)	t^2	ty_t
1990	–3	76	9	–228
1991	–2	87	4	–174
1992	–1	95	1	–95
1993	0	81	0	0
1994	1	91	1	91
1995	2	96	4	192
1996	3	90	9	270
মোট	0	616	28	56

রাশিতথ্যের সংখ্যা (n) = 7

সুতরাং, (1) ও (2) থেকে পাই,

$616 = 7a + 0.b$ বা, $a = \frac{616}{7} = 88$

এবং, $56 = 0.a + 28b$ বা, $b = \frac{56}{28} = 2$

সুতরাং, প্রবণতা সরলরেখাটির সমীকরণ হল :

$y_t = 88 + 2t$

(যেখানে মূলবিন্দু 1993 সালে এবং t-এর এক একক = 1 বছর)

এখন 1997 সালের (অর্থাৎ t = 1997 – 1993 = 4) প্রত্যাশিত উৎপাদন হবে,

$y_4 = 88 + 2 \times 4 = 96$ হাজার টন।

উদাহরণ ৬. নিম্নলিখিত চাহিদার তথ্য থেকে উপযুক্ত দ্বিঘাত প্রবণতা সমীকরণ নির্ণয় করুন।

বছর :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
চাহিদা : (হাজারে)	84	82	76	72	69	68	70	72	73

সমাধান : প্রদত্ত তথ্যের উপযোগী দ্বিঘাত প্রবণতার সমীকরণ হল

$$y_t = a + bt + ct^2$$

এখন a, b এবং c-এর মান নির্ণয়কারী মৌল সমীকরণ তিনটি হল

$$\sum y_t = na + b\sum t + c\sum t^2 \text{.........} (1)$$

$$\sum ty_t = a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3 \text{ ....} (2)$$

$$\sum t^2y_t = a\sum t^2 + b\sum t^3 + c\sum t^4 \text{.........} (3)$$

দ্বিঘাত প্রবণতা সমীকরণ নির্ণয়ের গণনা কার্য :

বছর (x)	**t = x – 1994**	**চাহিদা (y_t) (হাজারে)**	t^2	t^3	t^4	ty_t	t^2y_t
1990	–4	84	16	–64	256	–336	1344
1991	–3	82	9	–27	81	–246	748
1992	–2	76	4	–8	16	–152	304
1993	–1	72	1	–1	1	–72	72
1994	0	69	0	0	0	0	0
1995	1	68	1	1	1	68	68
1996	2	70	4	8	16	140	280
1997	3	72	9	27	81	216	648
1998	4	73	16	64	256	292	1168
মোট	0	666	60	0	708	–90	4622

(1), (2) ও (3) নং থেকে পাই,

$$666 = 9a + 0.b + 60c$$

$$–90 = 0.a + 60b + 0.c$$

$$4622 = 60a + 0.b + 708.c$$

উপরের সমীকরণগুলি সমাধান করে পাই,

$a = 70.06$, $b = –1.50$ এবং $c = 0.59$

সুতরাং, দ্বিঘাত প্রবণতা সমীকরণটি হল,

$$y_t = 70.06 – 1.50t + 0.50t^2$$

(যেখানে মুলবিন্তু 1994 সাল এবং t-এর এক একক = 1 বছর)

উদাহরণ ৭. প্রদত্ত তথ্য থেকে $y_t = ab^t$ ধরনের একটি প্রবণতা সমীকরণ নির্ণয় কর :

বছর (x) :	1994	1995	1996	1997	1998
চাহিদা (y) : (হাজার টাকায়)	16	45	13.8	40.2	125.0

সমাধান : এখন a ও b নির্ণয়কারী সমীকরণ দুটি হল,

$$\sum \log y_t = nA + B\sum t \text{........ (1)}$$

$$\sum t \log y_t = A\sum t + B\sum t^2 \text{....... (2)}$$

যেখানে $A = \log a$ এবং $B = \log b$

গণনা কার্য :

বছর (x)	**t = x –1993**	**বিক্রয় (y_t)**	**$\log_{10}y_t$**	**t^2**	**$t\log_{10}y_t$**
1994	1	16	0·2041	1	0·2041
1995	2	45	0·6532	4	1·3064
1996	3	13·8	1·1399	9	3·41197
1997	4	40·2	1·6042	16	6·4168
1998	5	125·0	2·0969	25	10·4845
মোট	15	–	5·69834	55	21·8315

এখন (1) ও (2) থেকে পাই,

$$5{\cdot}6983 = 5A + 15B$$

$$21{\cdot}8315 = 15A + 55B$$

সমীকরণ দুটি সমাধান করে পাই,

$$A = -0{\cdot}2814$$

এবং $B = 0{\cdot}4737$

সুতরাং, $a = \text{antilog}A = \text{antilog}\,(-0{\cdot}2814) = 0{\cdot}5231$

এবং $b = \text{antilog}\,B = \text{antilog}\,(0{\cdot}4737) = 2{\cdot}977$

নির্ণেয় সূচক প্রবণতার সমীকরণটি হল,

$y_t = (0{\cdot}5231)\,(2{\cdot}977)^t$

(যেখানে মূলবিন্দু 1993 সাল এবং t-এর একক = 1 বছর)

8.5 ঋতুজ সূচক নির্ধারণ পদ্ধতিসমূহ

প্রধানত ঋতুজ সূচক নির্ধারণের জন্য নিম্নলিখিত চারটি পদ্ধতি ব্যবহার করা হয় :

(ক) সাধারণ গড় পদ্ধতি (Method of Simple Average)

(খ) চলমান গড়-অনুপাত পদ্ধতি (Ratio of moving Averages Method)

(গ) প্রবণতা অনুপাত পদ্ধতি (Ratio to Trend Method)

(ঘ) পরস্পরীণ আপেক্ষিক পদ্ধতি (Link Relative Method)

(ক) সাধারণ গড় পদ্ধতি : এই পদ্ধতি কালীন সারিতে কোনও প্রবণতা বা চক্রীল ভেদ বিদ্যমান না থাকলে তবে প্রয়োগ করা হয়। বিভিন্ন বছরের তথ্য থেকে প্রতিমাসের বা প্রতি ত্রৈমাসিকের গড় নির্ণয় করা হয় ও এই গড়গুলি থেকে একটি সাধারণ গড় হিসাব করা হয়। প্রতিটি প্রাথমিক গড় সাধারণ গড়ের কত শতাংশ (গুণসূচক কাঠামোর কালীন সারির ক্ষেত্রে) বা সাধারণ গড় থেকে কতখানি বিচ্যুত (যৌগিক কাঠামোর কালীন সারির ক্ষেত্রে) তার পরিমাপ করলে ঋতুজ সূচক সংখ্যা বা Seasonal Index (গুণসূচক কাঠামোতে) এবং ঋতুজ প্রভেদসূচক মান বা Seasonal Value (যৌগিক কাঠামোতে) পাওয়া যাবে। A_t যদি কোন মাসের গড় হয় ও G সাধারণ গড় হয়, $\frac{A_t}{G} \times 100$ ঐ মাসের ঋতুজ সংখ্যা এবং $A_t - G$ ঐ মাসের ঋতুজ প্রভেদসূচক মান।

উদাহরণ ৮. নিম্নলিখিত কালীন সারি তথ্যের ক্ষেত্রে সাধারণ গড় পদ্ধতিতে ঋতুজ সূচক নির্ধারণ করুন :

বছর	**ত্রৈমাসিক উৎপাদন**			
	I	II	III	IV
1995	39	21	52	81
1996	45	23	63	76
1997	44	26	69	75
1998	53	23	64	84

সমাধান : প্রদত্ত কালীন সারির তথ্য স্বল্পমেয়াদী এবং চতুর্থাংশের অন্তর্গত মানগুলির মধ্যে প্রবণতা অতিমাত্রায় অনুপস্থিত। সুতরাং, সূচক নির্ণয়ে সাধারণ গড় পদ্ধতিই উপযুক্ত। গুণিতক কাঠামো প্রয়োগ করে পাই,

বছর	**ত্রৈমাসিক উৎপাদন**				**সমষ্টি**
	প্রথম চতুর্থাংশ	দ্বিতীয় চতুর্থাংশ	তৃতীয় চতুর্থাংশ	চতুর্থ চতুর্থাংশ	
1995	39	21	52	81	–
1996	45	23	63	76	–
1997	44	26	69	75	–
1998	53	23	64	84	–
মোট	181	93	248	316	–
গড় সমূহ	45·25	23·25	62·00	79·00	209·50
ঋতুজ সূচক	86·4	44·4	118·4	150·8	400·00

এখানে সাধারণ গড় G = 209·5/4 সুতরাং,

প্রথম চতুর্থাংশের ঋতুজ সূচক = $\frac{45{\cdot}25}{209{\cdot}50} \times 400 = 86{\cdot}4$। একইভাবে অন্যান্য চতুর্থাংশগুলির ঋতুজ সূচক গণনা করা হয়েছে।

(খ) চলমান গড়-অনুপাত পদ্ধতি : এই পদ্ধতি দ্বারা ঋতুজ সূচকের সবচেয়ে নির্ভরশীল পরিমাপ করা যায়। প্রথমত চলমান গড় পদ্ধতির সাহায্যে কালীন সারির মূল তথ্যের প্রবণতা নির্ণয় করা হয়। গুণিতক কাঠামোর কালীন সারির ক্ষেত্রে প্রবণতা মানের শতকরায় প্রকাশ করে তথ্যসমূহকে প্রবণতা মুক্ত করা হয়। তারপর চলমান গড়সমূহের অনুপাতসমূহকে সাধারণ গড় পদ্ধতিতে ঋতুজ সূচক নির্ধারণ করা হয়। কিন্তু যৌগিক কাঠামোর কালীন সারির ক্ষেত্রে নির্ণীত প্রবণতামানগুলি মূলতথ্য থেকে বিয়োগ করে তথ্যকে প্রবণতামুক্ত করা হয়। পরে সাধারণ গড় পদ্ধতিতে ঋতুজ সূচক নির্ধারণ করা হয়।

উদাহরণ ৯. নিম্নলিখিত কালীন সারি তথ্য থেকে চলমান গড় অনুপাত পদ্ধতিতে ঋতুজ সূচক নির্ণয় করুন :

ত্রৈমাসিক ঠাণ্ডা পানীয়ের (y) ব্যবহার (100 বোতলে)

বছর	I	II	III	IV
1994	68	61	61	63
1995	65	58	66	61
1996	68	63	63	67

সমাধান : প্রদত্ত কালীন সারিকে গুণিতক কাঠামোর আকারে প্রকাশ করে প্রথমত চলমান গড়-অনুপাত নির্ণয় করা হয়েছে।

চলমান গড়-অনুপাত নির্ণয় কার্য :

বছর	চতুর্থাংশ	পানীয়ের ব্যবহার(y)	চারটি মানের চলমান গড় (T)	চলমান গড় অনুপাত $\left(\frac{V}{T}\times100\%\right)$
1994	প্রথম	68	–	–
	দ্বিতীয়	61	–	–
	তৃতীয়	61	62·875	97·02
	চতুর্থ	63	62·125	101·41
1995	প্রথম	65	62·375	104·21
	দ্বিতীয়	58	62·750	92·43
	তৃতীয়	66	62·875	104·97
	চতুর্থ	61	63·875	95·50
1996	প্রথম	68	64·125	106·04
	দ্বিতীয়	63	64·509	97·67
	তৃতীয়	63	–	–
	চতুর্থ	67	–	–

ঋতুজ সূচকের গণনাকার্য :

বছর	ত্রৈমাসিক চলমান গড়-অনুপাত (শতকরায়)				সমষ্টি
	প্রথম	দ্বিতীয়	তৃতীয়	চতুর্থ	
1994 1995 1996	– 104·21 106·04	– 92·43 97·67	97·02 104·97 –	101·41 95·50 –	
সমষ্টি	210·25	190·10	201·99	196·91	–
গড়	105·125	95·05	100·995	98·455	399·625
ঋতুজ সূচক	105·22	95·14	101·09	98·55	400

প্রথম চতুর্থাংশের ঋতুজ সূচক $= \frac{105{\cdot}125}{399{\cdot}625} \times 400 = 105{\cdot}22$

অনুরূপভাবে, অন্যগুলি নির্ণয় করা হয়েছে।

(গ) প্রবণতা-অনুপাত পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে কালীন সারির তথ্যের মধ্যে গাণিতিক সম্পর্ক আছে এই অনুমান করে লঘিষ্ঠ বর্গ নীতিতে প্রবণতার মান নির্ণয় করা হয়। অতঃপর চলমান গড় অনুপাত পদ্ধতি মতো কালীন সারির তথ্যসমূহ অনুরূপ প্রবণতা মানের শতকরায় প্রকাশ করা হয়। এই শতকরা মানগুলির উপর সাধারণ গড় পদ্ধতি প্রয়োগ করে ঋতুজ সূচকগুলি পাওয়া যায়।

উদারহণ ১০. 1996 সাল থেকে 1998 সাল পর্যন্ত কলকাতায় যানবাহনের ত্রৈমাসিক দুর্ঘটনাসমূহ দেওয়া আছে। সরলরৈখিক প্রবণতা ধরে প্রবণতা-অনুপাত পদ্ধতি প্রয়োগে ঋতুজ সূচক নির্ণয় করুন।

ত্রৈমাসিক দুর্ঘটনা				
বছর	**I**	**II**	**III**	**IV**
1996	165	135	140	180
1997	152	121	127	163
1998	140	100	105	158

সমাধান : প্রথমত উপরোক্ত তথ্যের উপযোগী সরলরৈখিক প্রবণতার সমীকরণ

$$y_t = a + bt$$

সুতরাং, লঘিষ্ঠ বর্গ নীতির a ও b নির্ণয়কারী মৌল সমীকরণদ্বয়

$$\sum y_t = na + b\sum t$$

এবং $\sum ty_t = a\sum t + b\sum t^2$

সমাধান করে y_t পাওয়া যায়।

প্রবণতা-অনুপাত নির্ণয়ের গণনা কার্য :

বছর	চতুর্থাংশ	কালীনসারি(y_t)	t	t^2	ty_t	T_t = 140·5 – 1·38t	$\frac{Y_t}{T_t} \times 100$
1996	প্রথম	165	–11	121	–1815	155.7	106
	দ্বিতীয়	135	–9	81	–1215	152.9	88
	তৃতীয়	140	–7	49	–980	150·2	93
	চতুর্থ	180	–5	25	–900	147·4	122
1997	প্রথম	152	–3	9	–456	144·6	105
	দ্বিতীয়	121	–1	1	–121	141·9	85
	তৃতীয়	127	1	1	127	139·1	91
	চতুর্থ	163	3	9	489	136·4	120
1998	প্রথম	140	5	25	700	133·6	105
	দ্বিতীয়	100	7	49	700	130·8	76
	তৃতীয়	105	9	81	945	128·1	82
	চতুর্থ	158	11	121	1738	125·3	126
মোট	—	1686	0	572	–788	–	–

মৌল সমীকরণ দুটি সমাধান করে পাই,

$$u = \frac{1686}{12} = 140{\cdot}5, \; b = -\frac{788}{572} = -1{\cdot}38$$

সুতরাং, প্রবণতা সমীকরণ হল $T_t = 140{\cdot}5 - 1{\cdot}38t$

(যেখানে 1997 সালের দ্বিতীয় ও তৃতীয় চতুর্থাংশের মধ্যবিন্দু হল মূলবিন্দু এবং এক একক = অর্ধ চতুর্থাংশ)

ঋতুজ সূচকের গণনা কার্য :

বছর	ত্রৈমাসিক চলমান গড়-অনুপাত (শতকরায়)				সমষ্টি
	প্রথম	দ্বিতীয়	তৃতীয়	চতুর্থ	
1996	106	88	93	122	
1997	105	85	91	120	
1998	105	76	82	126	
মোট	316	249	266	368	–
গড়	105	83	89	123	400
ঋতুজ সূচক	105	83	89	123	400

(ঘ) পরস্পরীন আপেক্ষিক পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে প্রতিমাসের (বা ত্রৈমাসিক) মান পূর্ববর্তীমাসের (বা ত্রৈমাসিক) মানের শতকরা অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা হয়। এই অনুপাতগুলিকেই পরস্পরীন আপেক্ষিক (Lind relative) বলা হয়। পরে বিভিন্ন বছরের তথ্য থেকে প্রতিমাসের (বা ত্রৈমাসিক) জন্যে পরস্পরীয় অপেক্ষকগুলির গড় নির্ণয় করা হয়। এরপর প্রতি সময়স্তরের এককের জন্য শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক (Chain relative) হিসাবে করা হয়। এটি পাওয়া যায় কোন সময়স্তরের পরস্পরীন আপেক্ষিক ও তার পূর্ববর্তী সময়স্তরের শৃঙ্খলিত আপেক্ষিকের গুণফলকে 100 দিয়ে ভাগ করে। কিন্তু প্রথম মাস বা ত্রৈমাসিকের শৃঙ্খলিত আপেক্ষিককে 100 ধরা হয় কারণ, প্রথম সময়স্তরের পূর্বের এককের শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক জানা সম্ভব নয়। এজন্য শেষ সময়স্তরের পরেও আর একটি কল্পিত সময়স্তরের জন্য শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক হিসাব করা হয়। যেহেতু প্রতি বছরেই একই ধরনের ঋতুজ ভেদের দেখা পাওয়ার কথা, সেজন্য আমরা মনে করতে পারি যে, এই শৃঙ্খলিত আপেক্ষিকের মান প্রথম সময়স্তরের শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক মানের সমান হবে। কিন্তু সাধারণত তা না হওয়ায় দুয়ের মধ্যে পার্থক্য প্রবণতার জন্য হয়েছে বলে মনে করা হয়। প্রতি সময়স্তরে এই প্রবণতার অংশ নির্ণয় করে বাদ দেওয়ার জন্য মোট পার্থক্যকে এক বছরের সময়স্তরের সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে একটি সংশোধন অংক (adjustment factor) নির্ণয় করা হয়। প্রথম শৃঙ্খলিত অপেক্ষকটির কোনও রকম পরিবর্তন করা হয় না, কিন্তু পরবর্তী শৃঙ্খলিত অপেক্ষকগুলি থেকে ঐ অংকের যথাক্রমে 1 গুণ, 2 গুণ, ...ইত্যাদি বাদ দিয়ে প্রতি সময়স্তরের শৃঙ্খলিত অপেক্ষকগুলিকে প্রবণতার অংশ থেকে মুক্ত করে কিছুটা পরিবর্তিত করা হয়। এবার সব মাসগুলির (বা ত্রৈমাসিকগুলির) সংশোধিত শৃঙ্খলিত আপেক্ষিকগুলির (adjusted chain relatives) যোগফল যাতে 1200 হয় (বা 400 হয়), এইভাবে পরিবর্তিত শৃঙ্খলিত আপেক্ষিকগুলিকে পরিবর্তিত করলে ঋতুজ সূচক সংখ্যা পাওয়া যায়।

উদাহরণ ১১. পরস্পরীন আপেক্ষিক পদ্ধতিতে নিম্নোক্ত তথ্যের ঋতুজ সূচক সংখ্যা নির্ণয় করুন।

ত্রৈমাসিক চাহিদা (হাজারে)				
বছর	**I**	**II**	**III**	**IV**
1995	78	62	56	69
1996	84	64	61	84
1997	92	70	65	86
1998	98	81	72	95

সমাধান : ঋতুজ সূচক নির্ধারণ নিম্নলিখিত ধাপগুলির মধ্য দিয়ে করা হয়।

(ক) 1995 সালের দ্বিতীয় চতুর্থাংশের পরস্পরীন আপেক্ষিক

$$= \frac{62}{78} \times 100 = 79{\cdot}58$$

1995 সালের তৃতীয় চতুর্থাংশের পরস্পরীন আপেক্ষিক

$$= \frac{56}{62} \times 100 = 90{\cdot}32$$

অনুরূপে অন্যান্যগুলিও গণনা করা যায়

ঋতুজ সূচক নির্ণয়ের গণনা কার্য :

বছর	পরস্পরীন আপেক্ষিক সমূহ				সমষ্টি
	I	**II**	**III**	**IV**	
1995	–	79·58	90·32	121·21	
1996	121·74	76·09	95·31	137·71	
1997	109·52	76·9	92·86	132·31	
1998	113·95	82·65	88·89	137·95	
পরস্পরীন আপেক্ষিক গড়	115·07	78·63	91·85	131·50	
শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক	100	78·63	72·22	94·97	
সংশোধিত শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক	100	76·31	67·58	86·01	**329·9**
ঋতুজ সূচক সংখ্যা	121·3	92·5	81·9	104·3	**400**

(খ) প্রথম চতুর্থাংশের শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক = 100

দ্বিতীয় চতুর্থাংশের শৃঙ্কলিত আপেক্ষিক = $\frac{100 \times 78{\cdot}63}{100} = 78{\cdot}63$

তৃতীয় চতুর্থাংশের শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক = $\frac{78{\cdot}63 \times 91{\cdot}85}{100} = 72{\cdot}22$

চতুর্থ চতুর্থাংশের শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক = $\frac{72{\cdot}22 \times 131{\cdot}50}{100} = 94{\cdot}97$

প্রথম চতুর্থাংশের দ্বিতীয় শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক = $\frac{94{\cdot}97 \times 115{\cdot}07}{100} = 109{\cdot}28$

সংশোধন অংক (adjustment factor) = $\frac{109{\cdot}28 - 100}{4} = 2{\cdot}32$

(গ) প্রথম চতুর্থাংশের সংশোধিত শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক = 100

দ্বিতীয় চতুর্থাংশের সংশোধিত শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক = 78·63 – 2·32 = 76·31

তৃতীয় চতুর্থাংশের সংশোধিত শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক = 72·22 – 2 × 2·32 = 67·58

চতুর্থ চতুর্থাংশের সংশোধিত শৃঙ্খলিত আপেক্ষিক = 94·97 – 3 × 2·32 = 86·0

(ঘ) প্রথম চতুর্থাংশের ঋতুজ সূচক = $\frac{400}{329 \cdot 9} \times 100 = 121 \cdot 3$

দ্বিতীয় চতুর্থাংশের ঋতুজ সূচক = $\frac{400}{329 \cdot 9} \times 76 \cdot 31 = 92 \cdot 5$

তৃতীয় চতুর্থাংশের ঋতুজ সূচক = $\frac{400}{329 \cdot 9} \times 67 \cdot 58 = 81 \cdot 9$

চতুর্থ চতুর্থাংশের ঋতুজ সূচক = $\frac{400}{329 \cdot 9} \times 86 \cdot 01 = 104 \cdot 3$

8.5.1 ঋতুজ ভেদ দূরীকরণ (Deseasonalisation)

ঋতুজ ভেদ দূরীকরণ বলতে বোঝায় কালীন সারির তথ্যকে ঋতুজ ভেদ মুক্ত করা। যৌগিক কাঠামোর জন্য ঋতুজ ভেদ মুক্ত তথ্য হবে

$$Y_t - S_t = T_t + C_t + I_t$$

আবার গুণিতক কাঠামোর ক্ষেত্রে ঋতুজ ভেদ মুক্ত তথ্য হবে

$$\frac{Y_t}{S_t} = T_t \times C_t \times I_t$$

ঋতুজ ভেদ মুক্ত তথ্য চক্রীল ভেদ ও অনিয়মিত ভেদ পরিমাপের সাহায্য করে।

উদাহরণ ১২. নিম্নলিখিত বিক্রয়ের তথ্যকে ঋতুজ প্রভাবমুক্ত কর এবং ফলের তাৎপর্য ব্যাখ্যা করুন।

চতুর্থাংশ	বিক্রয় (হাজার টাকায়)	ঋতুজ সূচক
প্রথম	23.7	78
দ্বিতীয়	25.2	124
তৃতীয়	21.4	50
চতুর্থ	65.4	48

সমাধান : বিভিন্ন চতুর্থাংশের বিক্রয়মানগুলি ঋতুজ প্রভাবমুক্ত করতে গুণিতক কাঠামো প্রয়োগ করা হল।

এখানে ঋতুজ সূচক = ঋতুজ ভেদ × 100

ঋতুজ ভেদমুক্ত কালীন সারির গণনা কার্য :

চতুর্থাংশ	বিক্রয় (y) (হাজার টাকায়)	ঋতুজ ভেদ (S)	ঋতুজ ভেদমুক্ত বিক্রয় $\left(\frac{Y}{S}\right)$
প্রথম	23.7	0.78	30.4
দ্বিতীয়	25.2	1.24	20.3
তৃতীয়	21.4	0.50	42.8
চতুর্থ	65.4	0.48	44.2
মোট	—	4.00	—

শেষ স্তম্ভে ঋতুজ প্রভাবমুক্ত তথ্যের দ্বারা বছরের বিভিন্ন চতুর্থাংশে বিক্রির পরিমাণ প্রকাশিত হয়েছে যেখানে বিক্রিত তথ্য ঋতুজভেদ নিরপেক্ষ।

8.6 কালীন সারি তথ্যের ভিত্তিতে ব্যবসায় পূর্বাভাষ নির্ণয়

নির্ভুলভাবে ব্যবসা সংক্রান্ত কর্মপন্থা নির্ধারণ করার উপর ব্যবসার সাফল্য অনেকাংশে নির্ভর করে। ব্যবসায় সাফল্য দীর্ঘকালীন ভাবে ধরে রাখার জন্য তার গতিপ্রকৃতি ও স্বরূপ সম্পর্কে আস্থাশীল মূল্যায়ন প্রয়োজন, কারণ এর উপর ভিত্তি করেই ভবিষ্যতের কর্মপন্থা স্থির করা হয়ে থাকে। আস্থাশীল মূল্যায়নের জন্য ব্যবসা সংক্রান্ত অতীত তথ্যাদির সহজলভ্যতা (availibility) খুবই প্রয়োজন। অনুমানের উপর ভিত্তি না করে সংগঠিত বৈজ্ঞানিক পদ্ধতিসমূহের মাধ্যমে, ভবিষ্যতের ব্যবসায়িক কার্যকলাপ সম্বন্ধে বর্তমান উপযোগী সিদ্ধান্ত গ্রহণ করে অনিশ্চয়তা দূরীকরণে পূর্বাভাষ সহায়তা করে।

কোনো ব্যবসায়িক সংস্থা পরবর্তী বছরের উৎসব মরসুমে পণ্য বিক্রির লক্ষ্যমাত্রা স্থির করে আগাম পরিকল্পনা গ্রহণ করল এবং কাঁচামাল সংগ্রহ, মূলধনের ব্যবস্থা, গুদামের ব্যবস্থা, কর্মীসংখ্যা বৃদ্ধি ও অন্যান্য প্রাসঙ্গিক কর্মপন্থা স্থির করল। কিন্তু ব্যবসার সঠিক পূর্বাভাষ না থাকলে এর প্রতিটি প্রক্রিয়াই ব্যহত হবে এবং সংস্থাটি বিপুল পরিমান আর্থিক ক্ষতির সম্মুখীন হবে। ব্যবসার পূর্বাভাষ সম্পূর্ণ অনুমান ভিত্তিকও নয়, আবার ভবিষ্যতের পূর্ণাঙ্গ চিত্রও প্রদান করে না, কিন্তু ভবিষ্যতের অনিশ্চয়তা কমিয়ে আনার বিষয়ে একটি বিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতি, যা কালীন সারির তথ্যের উপর নির্ভরশীল।

ব্যবসায়িক প্রতিষ্ঠানের অতীত তথ্যের উপর কালীনসারি বিশ্লেষনের বিভিন্ন উপাংশসমূহের যেমন, প্রবণতা, ঋতুজভেদ ও চক্রক্রমিক পরিবর্তনের প্রভাব ইত্যাদির বিশ্লেষণের দ্বারা ব্যবসায় পূর্বাভাষ নিরুপন করা যায়। দর চাহিদা, উৎপাদন, বিক্রয় ইত্যাদি সম্পর্কিত তথ্যের পূর্বাভাষের ক্ষেত্রে কালীন সারির বিশ্লেষণ খুবই যথোপোযুক্ত। ব্যবসার সাথে যুক্ত বিভিন্ন সূচক সংখ্যাসমূহ ব্যবসার পূর্বাভাষ প্রদানের অপর একটি উপযোগী সহায়ক।

8.7 অনুশীলনী

সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন

(১) নিচের প্রত্যেকটি কালীন সারির কোন্ অংশের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত বলুন :

(ক) ছোট গাড়ির চাহিদা বেড়ে যাওয়া।

(খ) 1999 সালের ফেব্রুয়ারি মাসে কলকাতায় পাঁচ দিনব্যাপী বৃষ্টিপাত

(গ) নভেম্বর থেকে মার্চ মাস পর্যন্ত আইসক্রিম বিক্রিতে মন্দাভাব

(ঘ) উন্নতির সোপান।

(ঙ) অক্টোবর মাসে পোশাক-পরিচ্ছদের বিক্রি বেড়ে যাওয়া।

(চ) কোনও কারখানায় অগ্নিকাণ্ড জনিত ক্ষতি।

(ছ) দূরদর্শন সেট বিক্রয়ে সাধারণ বৃদ্ধি।

(২) বাৎসরিক তথ্যের ক্ষেত্রে কোন্ অংশ থাকতে পারে না?

(৩) ত্রৈমাসিক তথ্যের ঋতুজ সূচক সংখ্যাগুলির বাৎসরিক যোগফল কত হবে?

(৪) ঋতুজ ভেদের পরিমাপের জন্য গতিধারা অনুপাত (Ratio-to-trend) পদ্ধতিটি কখন উপযুক্ত হয়।

(৫) মুক্ত হস্ত পদ্ধতির প্রধান ত্রুটি কী?

(৬) মাসিক তথ্যের ক্ষেত্রে পর্যায়কাল কত?

(৭) প্রবণতা নিরুপণে চলমান গড় পদ্ধতির থেকে গাণিতিক রেখা পদ্ধতির সুবিধা কী?

(৮) কালীন সারির লেখতে ভূজ ও কোটি কী কী নির্দেশ করে?

রচনাত্মক প্রশ্ন :

(১) কালীন সারি কী? একটি কালীন সারির অংশগুলি কী কী?

(২) কোনও কালীন সারির বিশ্লেষণের উদ্দেশ্যগুলি কী কী?

(৩) সংক্ষেপে কালীন সারির বিভিন্ন অংশগুলি বর্ণনা কর এবং উদাহরণ দিন।

(৪) প্রবণতা পরিমাপের পদ্ধতিগুলি বর্ণনা করুন।

(৫) ঋতুজ ভেদ পরিমাপের পদ্ধতিগুলি বর্ণনা করুন।

(৬) অর্ধ-গড় পদ্ধতিতে প্রবণতা নির্ণয় করুন।

বছর :	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**
বার্ষিক উৎপাদন : (হাজার টন)	179	190	196	187	194	202	198	204	200

(৭) প্রদত্ত তথ্যে এমন একটি চক্রীল ভেদ আছে যার আবর্তকাল হল পাঁচ বছর। একটি উপযুক্ত পদবিশিষ্ট চলমান গড় পদ্ধতিতে প্রবণতার মান নির্ণয় করুন।

বছর:	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
বার্ষিক বিক্রয়: (হাজার টাকায়)	3.6	4.3	4.3	3.4	4.4	5.4	3.4	2.4	1.4	2.3

(৮) নিম্নলিখিত কালীন সারির তথ্যের চার পদবিশিষ্ট চলমান গড় নির্ণয় করুন।

বছর:	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
লাভ: (হাজার টাকায়)	201	193	179	198	206	196	183	203	210	201	188	205

(৯) নিম্নলিখিত তথ্যের লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতিতে একটি সরলরৈখিক প্রবণতা রেখা নির্ণয় করে 2000 সালে উৎপাদনমাত্রা কত লক্ষ টন হবে নির্ণয় করুন।

বছর:	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
বার্ষিক উৎপাদন: (লক্ষ টন)	50.3	52.7	59.3	57.3	56.8	60.7	62.1	58.6

(১০) প্রদত্ত তথ্যের একটি দ্বিঘাত অধিবৃত্তাকার প্রবণতা রেখা নির্ণয় কর এবং প্রাপ্ত ফলের উপর আপনার মতামত দিন।

বছর:	1990	1991	1992	1993	1994	1995
দর: (টাকায়)	200	207	228	240	281	392

(১১) নিম্নে প্রদত্ত রপ্তানী (y)-র ক্ষেত্রে $\log y_t = a + bt$ আকারের প্রবণতা রেখা নির্ণয় করুন।

t:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_t:	197	213	229	302	295	293	292	337	335

(১২) সাধারণ গড় পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত তথ্য থেকে ঋতুজ সূচক নির্ণয় করুন।

বছর	ত্রৈমাসিক কাগজের উৎপাদন (লক্ষ টন)			
	প্রথম	দ্বিতীয়	তৃতীয়	চতুর্থ
1994	72	68	80	70
1995	76	70	82	74
1996	74	66	84	80
1997	76	74	84	78
1998	78	74	86	82

(১৩) নিম্নে প্রদত্ত ত্রৈমাসিক বিক্রয়ের তথ্য থেকে চলমান গড়-অনুপাত পদ্ধতিতে ঋতুজ সূচক নির্ণয় করুন:

বছর	ত্রৈমাসিক উপজাত বস্ত্রের বিক্রয়মূল্য (হাজার টাকায়)			
	প্রথম	দ্বিতীয়	তৃতীয়	চতুর্থ
1995	197	188	176	194
1996	202	193	179	198
1997	206	196	183	203
1998	210	201	188	206

(১৪) নিম্নে বিদ্যুৎ ও জ্বালানীর ক্ষেত্রে কোনও কারখানায় ত্রৈমাসিক ব্যয় (লক্ষ টাকায়) দেওয়া আছে। গুণিতক কাঠামোয় কালীন সারি প্রয়োগ করে প্রবণতা-অনুপাত পদ্ধতিতে (সরলরৈখিক প্রবণতা অনুমান করে) ঋতুজ সূচক নির্ণয় কর এবং অবশেষে তথ্যকে ঋতুজ-ভেদ প্রভাবমুক্ত করুন :

বছর	চতুর্থাংশ			
	প্রথম	দ্বিতীয়	তৃতীয়	চতুর্থ
1996	78	62	56	71
1997	84	64	61	82
1998	92	70	63	85
1999	100	81	72	96

(১৫) নিম্নে প্রদত্ত তথ্য থেকে পরস্পরীন আপেক্ষিক পদ্ধতির সাহায্যে ঋতুজ ভেদ নির্ণয় করুন :

বছর	ত্রৈমাসিক ঠান্ডা পানীয়ের ব্যবহার (হাজার বোতল)			
	প্রথম	দ্বিতীয়	তৃতীয়	চতুর্থ
1994	160	180	172	168
1995	168	204	200	188
1996	180	216	208	196
1997	108	252	236	224

গ্রন্থপঞ্জী

১. ব্রজেন্দ্র কুমার গুহঠাকুরতা, ভাগবত দাশগুপ্ত ও বাসুদেব অধিকারী (1976): রাশিবিজ্ঞানের প্রয়োগ পদ্ধতি, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষাৎ, কলিকাতা।

২. রাজকুমার সেন (1986): সংখ্যাতত্ত্ব, পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ, কলিকাতা।

৩. Goon, A.M. Gupta, M. and Dasgupta, B. (1992): Fundamentals of Statistics, Vol II, The World Press Private Ltd. Calcutta.

৪. Maity, J.C. and Chakrabarti, J. (1995): Elementary Level Business Mathematics & Statistics, Eureka Publishers, Calcutta.

৫. Das, N. G. (1996): Statistical Methods, M. Das & Co., Calcutta.

৬. শৈলেশভূষণ চৌধুরী, অরিজিৎ চৌধুরী ও বিশ্বনাথ দাস (1976): রাশিবিজ্ঞানের মূলতত্ত্ব (প্রথম খণ্ড), পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষৎ, কলিকাতা।

৭. ড. রণজিৎ ধর ও রিখিয়া ধর : বাণিজ্যিক গণিত ও পরিসংখ্যান, দিশারি প্রকাশনী, কলিকাতা।

নোটস্